2024-től
érvényes követelmények

KÖZÉPSZINT • ÍRÁSBELI

Németh Sarolta

100 lépés az érettségihez

Rendszerező feladatsorok megoldásokkal

MATEMATIKA

MOZAIK

TARTALOMJEGYZÉK

Valószínűségszámítás, statisztika

Függvények

Geometria, koordináta-geometria, trigonometria

A feladatgyűjteményben használt matematikai jelölések

Jelölés	Magyarázat
$\mathbb{N}$	a természetes számok halmaza
$\mathbb{Z}$	az egész számok halmaza
$\mathbb{Z}^+$; $\mathbb{Z}^-$	a pozitív egész számok halmaza; a negatív egész számok halmaza
$\mathbb{Q}$; $\mathbb{Q}^*$	a racionális számok halmaza; az irracionális számok halmaza
$\mathbb{Q}^+$; $\mathbb{Q}^-$	a pozitív racionális számok halmaza; a negatív racionális számok halmaza
$\mathbb{R}$	a valós számok halmaza
$\mathbb{R}^+$; $\mathbb{R}^-$	a pozitív valós számok halmaza; a negatív valós számok halmaza
$a \in A$; $b \notin A$	a eleme az A halmaznak; b nem eleme az A halmaznak
$A \subseteq B$	A halmaz részhalmaza B halmaznak
$C \subset D$	C halmaz valódi részhalmaza D halmaznak
$E \not\subset F$	E halmaz nem részhalmaza F halmaznak
$A \cup B$; $C \cap D$; $E \setminus F$	A és B halmaz uniója; C és D halmaz metszete; E és F halmaz különbsége
$\varnothing$, $\{\,\}$	üres halmaz
$\bar{A}$	az A halmaz komplementere
$\lvert A \rvert$	az A halmaz elemszáma
$A \Rightarrow B$; $C \Leftrightarrow D$	ha A, akkor B; C akkor és csak akkor, ha D
$[a; b]$	a, b zárt intervallum
$[a; b[$	a, b balról zárt, jobbról nyitott intervallum
$]a; b]$	a, b balról nyitott, jobbról zárt intervallum
$]a; b[$	a, b nyitott intervallum
$n!$	n faktoriális: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$
$f: x \mapsto$	az f függvény hozzárendelési szabálya
$f(x_0)$	az f függvény helyettesítési értéke az x_0 helyen
$\lvert x \rvert$	az x szám abszolút értéke
$[x]$	az x szám egészrésze
$\{x\}$	az x szám törtrésze
$\sqrt{x}$	az x szám négyzetgyöke
$\sqrt[n]{x}$	az x szám n-edik gyöke
$a \mid b$	az a szám osztója a b számnak
(a, b)	az a és b szám legnagyobb közös osztója
$[a, b]$	az a és b szám legkisebb közös többszöröse
$\overrightarrow{AB}$	az A pontból B pontba mutató vektor
$\vec{a}$, $\vec{0}$	a vektor, nullvektor
$\sphericalangle$	szög

Feladatok

Mértani sorozatok szöveges feladatokban

Megoldás → 203. o. 062

mértani sorozat modelljének felismerése, alkalmazása

489 Tatabánya lakossága 2000-ben 78 000 fő volt. A következő 10 évben évről évre 3%-kal nőtt a lakosok száma. Hányan éltek Tatabányán 2010-ben?

490 Tamás az egyik nagy kozmetikai cég tanácsadója. 16 héttel ezelőtt elhatározta, hogy hétről hétre az előző heti forgalmának 8%-ával emelni fogja az eladások értékét. Terveit sikerült tartani, így ezen a héten 68 520 Ft-nyi forgalma volt. Hány forint értékű kozmetikumot adott el 16 héttel ezelőtt?

491 Az érettségihez közeledve Vivien egyre több időt töltött tanulással. Minden hétre ugyanannyi százalékkal növelte a tanulási időt, és ezt a növekedést 3 hónapig (12 hétig) folytatta. Az első héten összesen 60 percet tanult, a 12. héten pedig 189 percet. Hány százalékos növekedést tervezett hetente Vivien?

492 Peti testépítő edzésbe kezdett, és hogy nehogy feladja, elkezdett egy vlogot (videóblogot), amelyben minden héten beszámol az edzéséről az interneten.

Az első videóját 262-en nézték meg, a másodikat 288-an, a harmadikat 317-en, a negyediket már 348-an.

a) Igaz-e, hogy az eddigi nézők száma megközelítőleg mértani sorozatot alkot?

b) Ha később is ugyanebben az ütemben nőne a nézettsége, akkor hányadik héten érhetné el a 10 ezer követőt?

493 Az érettségizők száma évről évre az előző évi létszámnak megközelítőleg 1,2%-ával csökken. 2005-ben 416 ezren érettségiztek. Hány érettségiző lehet 2020-ban, ha ez a tendencia nem változik?

494 Egy cég autót vásárol, amely évenként 12%-ot veszít az értékéből. Mennyi volt egy most 8 éves autó ára újonnan, ha most 1 500 000 forintot ér az említett számítás szerint?

495 A magyar egy főre jutó GDP 15 700 dollár, az osztrák 49 000 dollár körül van. Magyarország 4%-os GDP-növekedést tűzött ki célul, Ausztria növekedése az elmúlt években 2,8% volt. Egy újságíró kiszámolta, hogy ha a magyar növekedés teljesül, az osztrák pedig változatlan marad, az azt jelenti, hogy a magyar GDP a következő évre 628 dollárral, az osztrák 1372 dollárral nő. Így azonban a különbség nem csökken, hanem nő, vagyis Magyarország sosem érheti utol Ausztriát. Igazolja vagy cáfolja ezt az állítást!

496 Egy gépsor értéke új korában 17 millió forint. Évenként 8%-os értékcsökkenéssel számolva hány év múlva kerül a gépsor értéke 8 millió forint alá?

Kamatos kamat

Megoldás ➞ 204. o. 0 6 3

mértani sorozatból való következtetés

497 Vanessza leköti a bankban a megspórolt 100 000 forintját évi 4,5%-os kamatra. Mennyi pénzt vehet fel 4 év múlva, ha közben nem változtatott a lekötésen?

498 Mennyi pénzt tettünk be az egyik bank *Osztálykassza* nevű számlájára 4 évvel ezelőtt, ha a lekötött pénzünk évente 6,5%-ot kamatozott mindvégig és most 192 970 forint van az osztály számláján?

499 Márk bankba tesz 250 000 forintot, évenként azonos kamatozásra. Két év múlva a betéte kamatokkal növelt értéke 294 849 Ft lett. Hány %-os volt az éves kamatláb?

500 A szülők első gyermekük születésekor betettek a bankba 10 000 Ft-ot, amit határozatlan időre, de minimum 18 évre lekötöttek évi 8%-os kamatra. A hosszú évek során azonban teljesen elfelejtkeztek róla, így most, amikor eszükbe jutott, meglepődve tapasztalták, hogy a betétük értéke 186 253 Ft-ra nőtt. Hány éves most az első gyermekük, akinek a pénzt szánták?

501 Egy ikerpár televíziós vetélkedőn nyert 3 millió forintot. Ezt az összeget azután három részre osztották:

– 1 millió forintot lekötöttek 5 évre, végig évi 10%-os kamatra (ekkor 5 évig nem lehet kivenni kamatvesztés nélkül pénzt a számláról);
– 1 millió forintot lekötöttek 1 évre, évi 5%-os kamatra (ekkor 1 évig nem lehet kivenni kamatvesztés nélkül pénzt a számláról);
– 1 millió forintot olyan számlára tettek be, amelyről bármikor ki lehet venni pénzt, de ennek az összegnek az évi kamatlába csak 1,5%.

Időközben úgy alakult, hogy 5 évig nem volt szükségük a pénzre, így mindhárom betétet bent hagyták a bankban. A kamatlábak az 5 év alatt nem változtak. Mindhárom betétnél minden év végén tőkésítették a kamatot, azaz ettől kezdve a kapott kamat is kamatozott.

a) Mennyi pénzük lett kamatokkal együtt az 5. év végére?
b) Ugyanez az összeg hány %-os átlagos éves kamattal lett volna elérhető?

502 Ádám szülei anyagilag is megtervezték gyermekük továbbtanulását. Ezért fiuk 5. születésnapján számlát nyitottak, amin 400 ezer forintot helyeztek el évi 6%-os kamatra. Pontosan 4 év múlva megváltozott a kamatláb, évi 4%-ra csökkent. A fiú 14. születésnapján hozzátettek a számlán eddig összegyűlt pénzhez újabb 300 ezer forintot, ekkor a kamatláb évi 5% lett. Mennyi pénz gyűlt össze a számlán Ádám 18. születésnapjára?

503 Egy bank két akciót hirdetett a lakossági megtakarítási számlán lekötött betétekre 5 éves lekötés esetén:

A) Az éves kamatláb 5%, ami az 5 év alatt végig változatlan marad.
B) Az éves kamatláb az első évben 9%, majd minden évben 2%-kal csökken.

a) Melyik konstrukció esetén lenne több pénzünk az 5 év letelte után a megtakarítási számlán?
b) Ha a kedvezőbb konstrukciót választjuk, hány %-kal lenne több pénzünk 5 év múlva a megtakarítási számlán?

504 Egy család az 5 millió forint spórolt pénzét bankba szeretné tenni, ezért körülnéztek a bankok ajánlatai között. Végül úgy döntöttek, hogy az alábbi három ajánlat közül fognak választani:

1. A bank évente 5% kamatos kamatot fizet, amit a lekötés minden évfordulóján jóváírnak a számlán, a számláról bármely lekötési évfordulón fel lehet venni pénzt.
2. A bank megkétszerezi az összeget, ha 15 évig lekötik a pénzt a számlán. Ha előbb szeretnék felvenni a pénzüket, akkor csak évi 3% kamatos kamatot fizet (minden lekötési évfordulón történő jóváírással) a bank.
3. A bank 5 éves kamatperiódussal számol: az első 5 évben az éves kamatláb 4,5%, a következő 5 évben 5,5%, az utolsó 5 évben 6%. A kamatot minden évben a lekötési évforduló végén jóváírják a számlán, és ettől kezdve a kamat is kamatozik.

a) Melyik konstrukciót válasszák, ha 10 évre szeretnék lekötni a pénzüket?

b) Melyik konstrukcióval lenne a legtöbb pénzük a számlán, ha 15 év múlva szeretnének lakást vásárolni?

Gyűjtőjáradék, törlesztőjáradék

Megoldás ➟ *205. o.* 0 6 4

kamatláb (p%): éves, havi, napi, kamattényező (q), kamatos kamat, futamidő (n), törlesztőrészlet (a), annuitás, gyűjtőjáradék: $S_n = a \cdot q \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$, *törlesztőjáradék:* $V_n \cdot q^n = a \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$

505 Egy bank azt hirdeti magáról, hogy a hitel éves kamatlába 12% napi kamatozású kamatos kamattal.

a) Mennyi a napi kamatláb? (Egy évet 365 napnak tekintsünk).

b) Mennyi a havi (30 napra vonatkozó) kamatláb?

506 Lakásra gyűjtök, ezért minden hónap 5-én 100 000 Ft-ot helyezek el a bankban egy gyűjtőszámlára, évi 6%-os kamatra. Mennyi pénzem lesz 10 év múlva a bankban, ha havi kamatozással számol a bank?

507 Hanna elhatározza, hogy a diákmunkáért kapott fizetéséből minden hónapban betesz a bankba 20 000 Ft-ot, havi kamatláb mindvégig 0,4%. Mennyi idő alatt tudja összegyűjteni a továbbtanulásra tervezett 1 millió forintot?

508 A nagyszülők unokájuk születésekor és ettől kezdve minden évben a gyerek születésnapján betettek 20 000 Ft-ot a bankba unokájuk számára. Az első 5 évben az éves kamatláb 6%, a következő 8 évben 4%, az utolsó 5 évben 3% volt. Mennyi pénzt tudtak adni unokájuknak a 18. születésnapján?

509 *a)* Legfeljebb mennyi kölcsönt vehetünk fel 10 évre 19%-os fix éves kamatlábbal, ha minden év végén egyszerre mindig 600 000 Ft-ot tudunk visszafizetni?

b) Hányszorosát fizetjük vissza a felvett hitelnek, ha a maximális összegű hitelt vesszük fel?

510 Lakásfelújításra veszünk fel 3 millió forint hitelt, évi 9%-os kamatra, a hitel futamideje 5 év. Mennyi lesz a havi törlesztőrészletünk, ha havi kamatozással számol a bank?

511 Egy 5 millió forintos autót szeretnénk vásárolni, de csak 2 millió forintunk van, a többire hitelt szeretnénk felvenni. Az autókereskedő ajánlata szerint a havi kamatláb 1,9%, a futamidő 6 év, havi tőkésítésű a hitel.

a) Mennyi lesz a havi törlesztőrészlet?

b) Mennyi az éves kamatláb?

c) Mennyit fizetünk ki összesen az autóért?

512 4 millió forintos kölcsönt vettünk fel egy banktól 8 éves futamidővel. A törlesztést a hitelfelvétel után 1 évvel kell megkezdeni és évente egyszer kell fizetni állandó törlesztőrészlettel.

a) Mennyi lesz az éves törlesztőrészlet, ha a hitelkamat évente 18%?

b) Ha az éves törlesztőrészlet 1 200 000 Ft, akkor hány év alatt tudjuk visszafizetni a hitelt?

c) Ha évente 600 000 Ft-ot tudunk törleszteni, akkor mennyi idő kellene a teljes visszafizetésre?

Összefoglaló feladatsor

Megoldás ➞ *208. o.* 0 6 5

Függvények, sorozatok

513 Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ másodfokú függvény grafikonját úgy kapjuk, hogy a $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = -x^2$ másodfokú függvényt a $\vec{v}(2; 9)$ vektorral eltoljuk.

a) Adja meg az f függvény hozzárendelési utasítását képlettel!

b) Határozza meg az f függvény szélsőértékét (a szélsőérték jellegét, helyét és értékét is adja meg!)

c) Állapítsa meg az f függvény zérushelyeit!

d) Ábrázolja a függvényt a $[-2; 5]$ intervallumon!

514 Adott két függvény:

$$f\colon [-6; 8] \to \mathbb{R},\quad f(x) = \frac{x}{2} + 3$$

$$g\colon [-6; 8] \to \mathbb{R},\quad g(x) = |1{,}5x - 3|.$$

a) Ábrázolja közös koordináta-rendszerben a két függvényt!

b) Adja meg az $f(x) \le g(x)$ egyenlőtlenség megoldásait!

515 Egy ritka fát akkor ültetnek ki a „faiskolába”, amikor magassága eléri a 12 cm-t. Innentől a magassága az $F(t) = 0{,}12 \cdot 1{,}5^t$ képlettel írható le, ahol t a kiültetéstől eltelt évek számát jelenti, $F(t)$ pedig a fa magasságát méterben.

a) Mekkora lesz a fa magassága a kiültetéstől számított 5 év múlva?

b) Ha a fa magassága eléri az 1,5 métert, akkor átültetik az erdőbe. A faiskolába ültetés utáni hányadik évben történik ez?

516 Dorina elhatározta, hogy a nyári szünetben sokat fog olvasni. A szünet első napján 25 oldalt olvasott egy regényből. Mindennap növelte az előző napi olvasási mennyiséget 10 oldallal.

a) Hány oldalt olvasott a 7. napon?

b) Hány nap alatt olvasta el a 913 oldalas regényt?

c) Hány oldalt olvasott az utolsó napon?

517 Egy család megfigyelte, hogy az elmúlt időszakban átlagosan minden évben 1,2-szer annyit költött benzinre, mint az előző évben.

a) Eszerint ha 2014-ben 144 000 Ft-ot fizettek benzinért, akkor várhatóan mennyi lett 2018-ban a család benzinköltsége?

b) A megfigyelés alapján és a 2014-es adatot figyelembe véve mennyi pénzt költhetett 2008-ban benzinre a család?

518 Két 24 cm kerületű derékszögű háromszögről a következőket tudjuk:

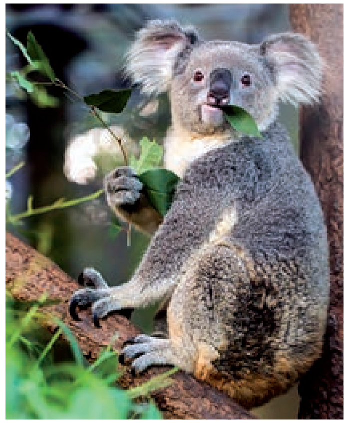
1. az egyik háromszög oldalai egy számtani sorozat egymást követő elemei;
2. a másik háromszög oldalai egy mértani sorozat egymást követő elemei.

Számolja ki a háromszögek oldalait! (3 tizedesjegy pontossággal adja meg az oldalhosszakat!)

519 A vadon élő koalák kipusztulhatnak Ausztráliában. Felmérések szerint a koalák száma évente átlagosan 8,9%-kal csökken. 2009-ben mindössze 43 000 vadon élő koalát számoltak össze.

a) Adjon képletet a koalák számára az eltelt idő függvényében, jelölje a 2009 óta eltelt évek számát t-vel!

b) Számolja ki, hogy 2018-ban (ha ez a becslés teljesült) hány koala élt szabadon Ausztráliában!



520 Bankba szeretnénk tenni a megspórolt pénzünket, ezért körülnéztünk a bankok ajánlatai között. Az egyik bank ajánlata szerint ha 10 évre lekötjük a pénzünket, akkor a dupláját kapjuk vissza tőlük.

a) Hány %-os éves kamatlábnak számítana ez a fajta lekötés, ha kamatos kamatozású számlára tennénk a pénzünket?

Egy másik bank évente 4%-os kamatos kamatot fizet a betétek után.

b) Hány év múlva kétszereződne meg ebben a bankban a pénzünk, ha a kamatot mindig a lekötési évforduló végén írják jóvá a számlán?

Megoldások

484 Számjegyek: $a-d,\ a,\ a+d$, összegük $3a=15 \Rightarrow a=5$, ekkor a számjegyek: $5-d,\ 5,\ 5+d$, de $d>0$ (növekvő számtani sorozat).

Csökkentés után: $5-d,\ 4,\ 5+d \Rightarrow$ a mértani sorozat hányadosa kétféleképpen:

$$\frac{4}{5-d}=\frac{5+d}{4}.$$

Keresztbe szorzunk, felbontjuk a zárójeleket, majd rendezzük az egyenletet:

$$16=(5+d)(5-d) \quad\Rightarrow\quad d^2=9 \quad\Rightarrow\quad d=3.$$

A keresett háromjegyű szám a 258.

485 Ismerősök: $a-d,\ a,\ a+d$, összegük $3a=6 \Rightarrow a=2$, így az ismerősök száma: $2-d,\ 2,\ 2+d$.

Mértani: $7-d,\ 4,\ 3+d \Rightarrow$ a mértani sorozat hányadosa kétféleképpen:

$$\frac{4}{7-d}=\frac{3+d}{4}.$$

Keresztbe szorzunk, felbontjuk a zárójeleket, majd rendezzük az egyenletet:

$$16=(7-d)(3+d) \quad\Rightarrow\quad d^2-4d-5=0.$$

Az egyenlet gyökei:

$d_1=5$, ekkor az ismerősök száma: $-3,\ 2,\ 7$, ez nem megoldás,

$d_2=-1$, ekkor az ismerősök száma: $3,\ 2,\ 1$.

A mértani sorozat: $8,\ 4,\ 2$.

486 A megváltoztatott oldalak számtani sorozat elemei: $a-d,\ a,\ a+d$, összegük $3a=24 \Rightarrow a=8$. Ebből a háromszög oldalai: $8-d,\ 8,\ 8+d$.

Az eredeti oldalak egy mértani sorozat elemei: $11-d,\ 12,\ 14+d \Rightarrow$ a mértani sorozat hányadosa kétféleképpen:

$$\frac{12}{11-d}=\frac{14+d}{12}.$$

Keresztbe szorzunk, felbontjuk a zárójeleket, majd rendezzük és megoldjuk az egyenletet:

$$144=(11-d)(14+d) \quad\Rightarrow\quad d_1=2,\ d_2=-5.$$

Ha $d=2$, a mértani sorozat: $9,\ 12,\ 16$; ha pedig $d=-5$, a mértani sorozat: $16,\ 12,\ 9$, ami nem felel meg a növekvő feltételnek.

Így a háromszög oldalai: 9 cm, 12 cm, 16 cm.

487 A számok: $a-d,\ a,\ a+d \Rightarrow 2a=20 \Rightarrow a=10$, így a számok: $10-d,\ 10,\ 10+d$.

Az új számok: $11-d,\ 15,\ 23+d$, a mértani sorozat hányadosa kétféleképpen:

$$\frac{15}{11-d}=\frac{23+d}{15}.$$

Keresztbe szorzunk, felbontjuk a zárójeleket, majd rendezzük és megoldjuk az egyenletet:

$$225=(23+d)(11-d) \quad\Rightarrow\quad d^2+12d-28=0 \quad\Rightarrow\quad d_1=2,\ d_2=-14.$$

Két megoldás van:

$$d_1=2,\quad \text{ekkor } q_1=\frac{15}{11-2}=\frac{5}{3},$$

$$d_2=-14,\quad \text{ekkor } q_2=\frac{15}{11-(-14)}=\frac{3}{5}.$$

488 A számtani sorozat: $a-d, a, a+d \Rightarrow 3a = 180 \Rightarrow a = 60$, így az elemek: $60-d, 60, 60+d$.
A mértani sorozat: $52-d, 64, 108+d$, ekkor a sorozat hányadosa kétféleképpen:

$$\frac{64}{52-d} = \frac{108+d}{64}.$$

Keresztbe szorzunk, felbontjuk a zárójeleket, majd rendezzük és megoldjuk az egyenletet:

$$4096 = (108+d)(52-d) \quad \Rightarrow \quad d^2 + 56d - 1520 = 0 \quad \Rightarrow \quad d_1 = 20,\ d_2 = -76.$$

megoldások 0 6 2

Mértani sorozatok szöveges feladatokban

489 A 11. elem: $78\,000 \cdot 1{,}03^{10} \approx 104\,825$.

490 A 17. elemre felírt egyenletbe helyettesítünk:

$$x \cdot 1{,}08^{16} = 68\,520 \quad \Rightarrow \quad x \approx 20\,000 \text{ Ft}.$$

491 A 12. elemre felírt egyenletbe helyettesítünk és megoldjuk az egyenletet:

$$60 \cdot x^{11} = 189 \quad \Rightarrow \quad x = 1{,}1099.$$

Tehát Vivien hetente 10,99%-os növekedést tervezett.

492 *a)* Ha mértani sorozatot alkotna a követők száma, akkor az egymás utáni napok nézőinek hányadosa állandó lenne:

$$\frac{288}{262} \approx 1{,}0992 \approx 1{,}1; \qquad \frac{317}{288} \approx 1{,}1007 \approx 1{,}1; \qquad \frac{348}{317} \approx 1{,}0978 \approx 1{,}1.$$

Mivel mindhárom hányados 1,1-re kerekíthető, így olyan mértani sorozatnak tekinthető a követők száma, amelynek első eleme 262, hányadosa 1,1.

b) Az n-edik héten érné el, így $a_n = 10\,000$, ebből

$$10\,000 = 262 \cdot 1{,}1^{n-1}.$$

Rendezzük az egyenletet:

$$1{,}1^{n-1} = \frac{10\,000}{262} \quad \Rightarrow \quad n = \log_{1,1}\frac{11\,000}{262} = \frac{\lg\frac{11\,000}{262}}{\lg 1{,}1} \approx 39{,}21.$$

Így a 40. héten érné el a követők száma a 10 000-et.

493 A 16. elemre felírt egyenletbe helyettesítünk:

$$416\,000 \cdot 0{,}988^{15} \approx 347\,094 \text{ érettségiző}.$$

494 $x \cdot 0{,}88^8 = 1\,500\,000 \Rightarrow x \approx 4\,170\,901$ Ft

495 Magyarország GDP-növekedése mértani sorozatot alkot, amelynek első eleme 15 700, hányadosa 1,04, ugyanez Ausztria esetében olyan mértani sorozat, amelynek első eleme 49 000, hányadosa 1,028. Így n év múlva a magyar GDP $15\,700 \cdot 1{,}04^n$, az osztrák GDP $49\,000 \cdot 1{,}028^n$.

Magyarország akkor éri utol Ausztriát GDP-ben, ha van olyan év, vagyis van olyan n, amelyre az előbbi két érték egyenlő: $15\,700 \cdot 1{,}04^n = 49\,000 \cdot 1{,}028^n$.

Megoldjuk ezt az egyenletet:

$$\frac{1{,}04^n}{1{,}028^n}=\frac{49000}{15700} \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{1{,}04}{1{,}028}\right)^n=\frac{490}{157}.$$

Vesszük mindkét oldal logaritmusát:

$$n=\log_{\frac{1{,}04}{1{,}028}}\frac{490}{157}=\frac{\lg\frac{490}{157}}{\lg\frac{1{,}04}{1{,}028}}\approx 98{,}07.$$

Tehát ha maradnának a növekedési adatok, Magyarország kb. 98 év múlva utolérhetné Ausztriát.

496 Az általános tagra felírt egyenletbe helyettesítünk és megoldjuk:

$$17\cdot 0{,}92^x=8 \quad\Rightarrow\quad 0{,}92^x=\frac{8}{17}.$$

Ebből:

$$x=\log_{0{,}92}\frac{8}{17}=\frac{\lg\frac{8}{17}}{\lg 0{,}92}\approx 9{,}04,$$

tehát 9 év múlva, azaz a 10. évben.

megoldások 0 6 3

Kamatos kamat

Figyelnünk kell arra, hogy a sorozat elemei hogyan vannak összhangban a feladat szövegével (az indexek elcsúszhatnak). A feladatokban elvileg a mértani sorozat általános tagjának képletét és az összegképletet is alkalmazhatjuk.

497 $100\,000\cdot 1{,}045^4\approx 119\,252$ Ft

498 $x\cdot 1{,}065^4=192\,970 \quad\Rightarrow\quad x\approx 150\,000$ Ft

499 $250\,000\cdot x^2=294\,849 \quad\Rightarrow\quad x=1{,}086 \quad\Rightarrow\quad 8{,}6\%$

500 $10\,000\cdot 1{,}08^x=186\,253 \quad\Rightarrow\quad 1{,}08^x=18{,}6253,$ ebből

$$x=\log_{1{,}08}18{,}6253=\frac{\lg 18{,}6253}{\lg 1{,}08}\approx 38.$$

$x\approx 38$ éves.

501 *a)* 1. $1\,000\,000\cdot 1{,}1^5=1\,610\,510$ Ft
2. $1\,000\,000\cdot 1{,}05^5\approx 1\,276\,282$ Ft
3. $1\,000\,000\cdot 1{,}015^5\approx 1\,077\,284$ Ft
Összesen $1\,610\,510+1\,276\,282+1\,077\,284=3\,964\,076$ Ft-juk lett kamatokkal együtt az 5. év végére.

b) Ez az összeg átlagosan évi

$$3\,000\,000\cdot x^5=3\,964\,076 \quad\Rightarrow\quad x\approx 1{,}057 \quad\Rightarrow\quad 5{,}7\%\text{ kamatot jelent.}$$

502 A 9. születésnapra $400\,000 \cdot 1{,}06^4 \approx 504\,991$ Ft lett a számlán. Ezután a kamat csökkent, így a 14. születésnapra $504\,991 \cdot 1{,}04^5 \approx 614\,399$ Ft volt a bankban.

Ekkor a szülők hozzátettek 300 ezer forintot, ami 4 évig kamatozott, így a számlán összegyűlt összeg: $(614\,399 + 300\,000) \cdot 1{,}05^4 \approx 1\,111\,458$ Ft.

503 Ha x összeget teszünk a számlára, akkor 5 év múlva az egyes esetekben a következő összeg lesz a számlán:

A) $x \cdot 1{,}05^5 \approx x \cdot 1{,}2763$

B) $x \cdot 1{,}09 \cdot 1{,}07 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}01 \approx x \cdot 1{,}2740$.

a) Az *A)* konstrukció esetén lenne több pénzünk.

b) $\dfrac{x \cdot 1{,}2763}{x \cdot 1{,}2740} \approx 1{,}0018 = 100{,}18\%$, vagyis 0,18%-kal lenne több pénzünk.

504 *a)* 10 év múlva:

1. $5\,000\,000 \cdot 1{,}05^{10} \approx 8\,144\,473$ Ft lesz a számlán.
2. Mivel nem kötik le 15 évre, így csak 3% kamatot kapnak: $5\,000\,000 \cdot 1{,}03^{10} \approx 6\,719\,582$ Ft lesz a számlán.
3. $5\,000\,000 \cdot 1{,}045^5 \cdot 1{,}055^5 \approx 8\,143\,550$ Ft lesz a számlán.

Ekkor az első konstrukciót érdemes választaniuk.

b) 15 év múlva:

1. $5\,000\,000 \cdot 1{,}05^{15} \approx 10\,394\,641$ Ft lesz a számlán.
2. 15 évre kötik le a pénzüket, így megkétszerezik, azaz $10\,000\,000$ Ft lesz a számlán.
3. $5\,000\,000 \cdot 1{,}045^5 \cdot 1{,}055^5 \cdot 1{,}06^5 \approx 10\,897\,907$ Ft lesz a számlán.

Ekkor a harmadik konstrukciót érdemes választaniuk.

megoldások 0 6 4

Gyűjtőjáradék, törlesztőjáradék

505 *a)* A 12% éves kamat azt jelenti, hogy a visszafizetett összeg 112%-a a felvett hitelnek. Mivel napi kamatozással számolnak, így ha q a napi kamattényező, akkor

$$q^{365} = 1{,}12 \quad \Leftrightarrow \quad q = \sqrt[365]{1{,}12} \approx 1{,}00031, \quad \text{ami} \quad 100{,}031\%.$$

Ebből a napi kamatláb 0,031%.

b) A havi kamattényező:

$$\left(\sqrt[365]{1{,}12}\right) \approx 1{,}00936 \quad \Leftrightarrow \quad 100{,}936\%.$$

Ebből a havi kamatláb 0,936%.

506 Az éves kamatláb 6%, így az éves kamattényező 1,06, ebből a havi kamattényező:

$$q^{12} = 1{,}06 \quad \Leftrightarrow \quad q = \sqrt[12]{1{,}06} \approx 1{,}00487.$$

Az időszakok száma $10 \cdot 12 = 120$.

$$S_{120} = 100\,000 \cdot 1{,}00487 \cdot \frac{1{,}00487^{120} - 1}{1{,}00487 - 1} \approx 16\,329\,068$$

507 A havi kamattényező: $q = 1{,}004$. Az időszakok száma n, $S_n = 1\,000\,000$.

$$1\,000\,000 = 20\,000 \cdot 1{,}004 \cdot \frac{1{,}004^n - 1}{1{,}004 - 1} \overset{:20\,000}{\Leftrightarrow} 50 = 1{,}004 \cdot \frac{1{,}004^n - 1}{0{,}004}$$

Vezessünk be egy segédváltozót: $x = 1{,}004^n$, így

$$50 = 1{,}004 \cdot \frac{x-1}{0{,}004} \overset{\cdot 0{,}004}{\Leftrightarrow} 0{,}2 = 1{,}004(x-1),$$

$$0{,}2 = 1{,}004x - 1{,}004 \overset{+1{,}004}{\Leftrightarrow} 1{,}204 = 1{,}004x \overset{:1{,}004}{\Leftrightarrow} x = 1{,}1992.$$

Visszahelyettesítve:

$$x = 1{,}004^n = 1{,}192 \quad \Leftrightarrow \quad n = \log_{1{,}004} 1{,}192 = \frac{\lg 1{,}192}{\lg 1{,}004} = 43{,}9959 \approx 44 \text{ hónap.}$$

Hanna 44 hónap alatt, azaz 3 év 8 hónap alatt tudja összegyűjteni az 1 000 000 Ft-ot.

508 Az első 5 évben a kamattényező $q = 1{,}06$, az összegyűjtött pénz:

$$S_1 = 20\,000 \cdot 1{,}06 \cdot \frac{1{,}06^5 - 1}{1{,}06 - 1} \approx 119\,506 \text{ Ft.}$$

Ez az összeg a következő években csak kamatozott, 8 évig 4%-ot, 5 évig 3%-ot évente, így az első 5 év befizetéséből

$$119\,506 \cdot 1{,}04^8 \cdot 1{,}03^5 \approx 189\,602 \text{ Ft lett.}$$

A középső 8 évben a kamattényező $q = 1{,}04$, az összegyűjtött pénz:

$$S_2 = 20\,000 \cdot 1{,}04 \cdot \frac{1{,}04^8 - 1}{1{,}04 - 1} \approx 191\,656 \text{ Ft.}$$

Ez az összeg a következő években csak kamatozott, 5 évig 3%-ot évente, így a középső 8 év befizetéséből

$$191\,656 \cdot 1{,}03^5 \approx 222\,182 \text{ Ft lett.}$$

Az utolsó 5 évben a kamattényező $q = 1{,}03$, az összegyűjtött pénz:

$$S_3 = 20\,000 \cdot 1{,}03 \cdot \frac{1{,}03^5 - 1}{1{,}03 - 1} \approx 109\,368 \text{ Ft.}$$

A nagyszülők összesen a 3 kamatozási idő alatt

$$189\,602 + 222\,182 + 109\,368 = 521\,152 \text{ Ft-ot}$$

gyűjtöttek unokájuknak.

509 *a)* A kamattényező $q = 1{,}19$, a törlesztőrészletek száma: $n = 10$, a törlesztőrészlet: $a = 600\,000$.

$$V_{10} \cdot 1{,}19^{10} = 600\,000 \cdot \frac{1{,}19^{10} - 1}{1{,}19 - 1} \Leftrightarrow V_{10} \cdot 1{,}19^{10} \approx 14\,825\,317{,}23 \overset{:1{,}19^{10}}{\Leftrightarrow} V_{10} \approx 2\,603\,361 \text{ Ft}$$

A felvehető maximális hitel 2 603 360 Ft.

b) Visszafizetünk $10 \cdot 600\,000 = 6\,000\,000$ Ft-ot.

$$\frac{6\,000\,000}{2\,603\,361} \approx 2{,}3\text{-szorosát fizetjük vissza.}$$

510 Az éves kamatláb 9%, az éves kamattényező $q = 1{,}09$.
Az éves kamattényzőből a havi kamattényező:

$$q^{12} = 1{,}09 \quad \Leftrightarrow \quad q = \sqrt[12]{1{,}09} \approx 1{,}0072.$$

A futamidő $n = 5 \cdot 12 = 60$.

$$3\,000\,000 \cdot 1{,}0072^{60} = a \cdot \frac{1{,}0072^{60} - 1}{1{,}0072 - 1} \quad \Leftrightarrow \quad 4\,613\,858{,}601 = a \cdot 74{,}716 \quad \Leftrightarrow \quad a \approx 61\,751{,}95 \text{ Ft}$$

A havi törlesztőrészlet 61 752 Ft.

511 *a)* Havi kamatláb 1,9%, a havi kamattényező $q = 1{,}019$, a futamidő $n = 6 \cdot 12 = 72$.

$$3\,000\,000 \cdot 1{,}019^{72} = a \cdot \frac{1{,}019^{72} - 1}{1{,}019 - 1} \quad \Leftrightarrow \quad 11\,632\,217{,}21 = a \cdot 151{,}4424 \quad \Leftrightarrow \quad a \approx 76\,810 \text{ Ft}$$

A havi törlesztőrészlet 76 810 Ft.

b) Az éves kamattényező:

$$1{,}019^{12} \approx 1{,}2534 \quad \Leftrightarrow \quad 125{,}34\%.$$

Így az éves kamatláb 25,34%.

c) 2 millió forintot önerőként befizettünk, majd a hitel összesen:

$$72 \cdot 76\,810 = 5\,530\,320.$$

Így a futamidő végéig az autóért összesen fizetendő:

$$2\,000\,000 + 5\,530\,320 = 7\,530\,320 \text{ Ft}.$$

512 *a)* Éves kamatláb 18%, az éves kamattényező $q = 1{,}18$, a futamidő $n = 8$.
Az éves törlesztőrészlet:

$$4\,000\,000 \cdot 1{,}18^{8} = a \cdot \frac{1{,}18^{8} - 1}{1{,}18 - 1} \quad \Leftrightarrow \quad 15\,035\,436{,}81 = a \cdot 15{,}327 \quad \Leftrightarrow \quad a \approx 980\,977 \text{ Ft}.$$

A havi törlesztőrészlet 60 165 Ft.

b) Az éves törlesztőrészlet 1 200 000 Ft, így

$$4\,000\,000 \cdot 1{,}18^{n} = 1\,200\,000 \cdot \frac{1{,}18^{n} - 1}{1{,}18 - 1} \quad \overset{:100\,000}{\Leftrightarrow} \quad 40 \cdot 1{,}18^{n} = 12 \cdot \frac{1{,}18^{n} - 1}{1{,}18 - 1}.$$

Vezessünk be egy segédváltozót: $x = 1{,}18^{n}$, így

$$40x = 12 \cdot \frac{x - 1}{0{,}18} \quad \overset{\cdot 0{,}18}{\Leftrightarrow} \quad 7{,}2x = 12 \cdot (x - 1),$$

$$7{,}2x = 12x - 12 \quad \overset{+12-7{,}2x}{\Leftrightarrow} \quad 12 = 4{,}8x \quad \overset{:4{,}8}{\Leftrightarrow} \quad x = 2{,}5.$$

Visszahelyettesítve:

$$x = 1{,}18^{n} = 2{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad n = \log_{1{,}18} 2{,}5 = \frac{\lg 2{,}5}{\lg 1{,}18} = 5{,}53 \text{ év}.$$

Tehát $5{,}53$ év ≈ 5 év 7 hónap alatt tudjuk visszafizetni a hitelt.

c) Ha évente 600 000 Ft-ot tudunk törleszteni, akkor

$$4\,000\,000 \cdot 1{,}18^n = 600\,000 \cdot \frac{1{,}18^n - 1}{1{,}18 - 1} \overset{:100\,000}{\Leftrightarrow} 40 \cdot 1{,}18^n = 6 \cdot \frac{1{,}18^n - 1}{1{,}18 - 1}.$$

Vezessünk be egy segédváltozót: $x = 1{,}18^n$, így

$$40x = 6 \cdot \frac{x-1}{0{,}18} \overset{\cdot 0{,}18}{\Leftrightarrow} 7{,}2x = 6 \cdot (x-1),$$

$$7{,}2x = 6x - 6 \overset{-6x}{\Leftrightarrow} 1{,}2x = -6 \overset{:1{,}2}{\Leftrightarrow} x = -5.$$

Visszahelyettesítve: $x = 1{,}18^n = -5$, ahol a bal oldal pozitív, a jobb oldal negatív, a két oldal nem lehet egyenlő, így az egyenletnek nincs megoldása. Ebben az esetben ezt a hitelt nem tudjuk visszafizetni, tehát ne vegyük fel, ha törleszteni csak 600 000 Ft-ot tudunk évente.

megoldások 065

Összefoglaló feladatsor

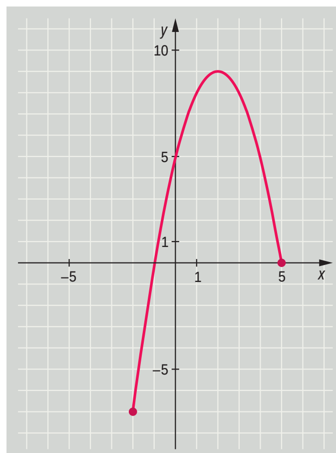
Függvények, sorozatok

513 *a)* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -(x-2)^2 + 9$

b) Maximuma van az $x = 2$ helyen, a maximum értéke $y = 9$.

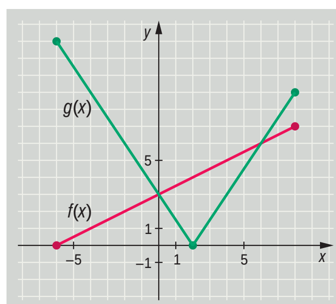
c) $0 = -(x-2)^2 + 9 \ \Rightarrow\ x - 2 = \pm 3,$ amiből $x_1 = 5, x_2 = -1$

d) A függvény grafikonja az ábrán látható.



514 *a)* A függvények grafikonja az ábrán látható.

b) $x \in [-6; 0] \cup [6; 8]$



515 *a)* $F(5) = 0{,}12 \cdot 1{,}5^5 = 0{,}91125$ m $= 91{,}125$ cm lesz a fa magassága.

b) $1{,}5 = 0{,}12 \cdot 1{,}5^t \ \Rightarrow\ 1{,}5^t = 12{,}5 \ \Rightarrow$ logaritmussal $t \approx 6{,}22 \ \Rightarrow$ a fa magassága az 1,5 métert a 7. évben éri el.

516 *a)* $a_7 = 25 + 6 \cdot 10 = 85$ oldalt olvasott.

b) Az összegképletet felhasználva:

$$913 = \frac{2 \cdot 25 + (n-1) \cdot 10}{2} \cdot n \quad \Rightarrow \quad 1826 = (40 + 10n)n \quad \Rightarrow \quad 10n^2 + 40n - 1826 = 0,$$

amiből $n_1 = 11{,}66$; $n_2 = -15{,}66$ (ez nem értelmezhető), vagyis a 12. napon olvasta el ezt a regényt.

c) $S_{11} = \dfrac{2 \cdot 25 + 10 \cdot 10}{2} \cdot 11 = 825$; $913 - 825 = 88$ oldalt olvasott az utolsó napon.

517 *a)* $144\,000 \cdot 1{,}2^4 = 298\,598{,}4$ Ft lesz várhatóan a benzinköltség.

b) $x \cdot 1{,}2^6 = 144\,000 \quad \Rightarrow \quad 48\,225{,}3$ Ft-ot költhettek benzinre.

518 Számtani sorozat: befogók: $a - d$, a, átfogó: $a + d$, ahol $d > 0 \quad \Rightarrow \quad 3a = 24 \quad \Rightarrow \quad a = 8$.
Ebből a háromszög oldalai: $8 - d$, 8, $8 + d$.
Mivel derékszögű a háromszög, felírjuk a Pitagorasz-tételt:

$$(8 - d)^2 + 8^2 = (8 + d)^2.$$

Felbontjuk a zárójeleket és megoldjuk az egyenletet:

$$64 = 32d \quad \Rightarrow \quad d = 2,$$

így az oldalak: 6 cm, 8 cm, 10 cm.

Mértani sorozat: befogók: a, aq, átfogó: aq^2, ahol $q > 1$.
Mivel derékszögű a háromszög, felírjuk a Pitagorasz-tételt:

$$a^2 + (aq)^2 = (aq^2)^2 \quad \overset{:a^2}{\Rightarrow} \quad 1 + q^2 = q^4,$$

q^2-re nézve másodfokú egyenlet, amelynek gyökei $q^2 = -0{,}618$, ami nem ad megoldást és $q^2 = 1{,}618$, amiből $q = 1{,}272$ lehet csak megoldás:

$$a + 1{,}272a + 1{,}618a = 24 \quad \Rightarrow \quad a = 6{,}170,$$

így az oldalak: 6,170 cm, 7,848 cm, 9,983 cm.

519 *a)* $K(t) = 43\,000 \cdot 0{,}911^t$

b) $K(t) = 43\,000 \cdot 0{,}911^9 \approx 18\,584$ koala

520 Ha x összeget helyeznénk el a bankban és

a) q-szorosára változik minden évben a számlán levő pénz, akkor

$$x \cdot q^{10} = 2 \cdot x.$$

Osztunk x-szel, majd gyököt vonunk: $q = \sqrt[10]{2} \approx 1{,}0718$, ebből évente 107,18%-ára, azaz évente 7,18% a kamatláb.

b) n évig tartjuk bankban a pénzünket, akkor

$$x \cdot 1{,}04^n = 2 \cdot x.$$

Osztunk x-szel, majd logaritmizálunk:

$$1{,}04^n = 2 \quad \Rightarrow \quad n = \log_{1{,}04} 2 = \frac{\lg 2}{\lg 1{,}04} \approx 17{,}67,$$

így 18 év múlva kétszereződne meg a pénzünk.