Trembeczki Csaba

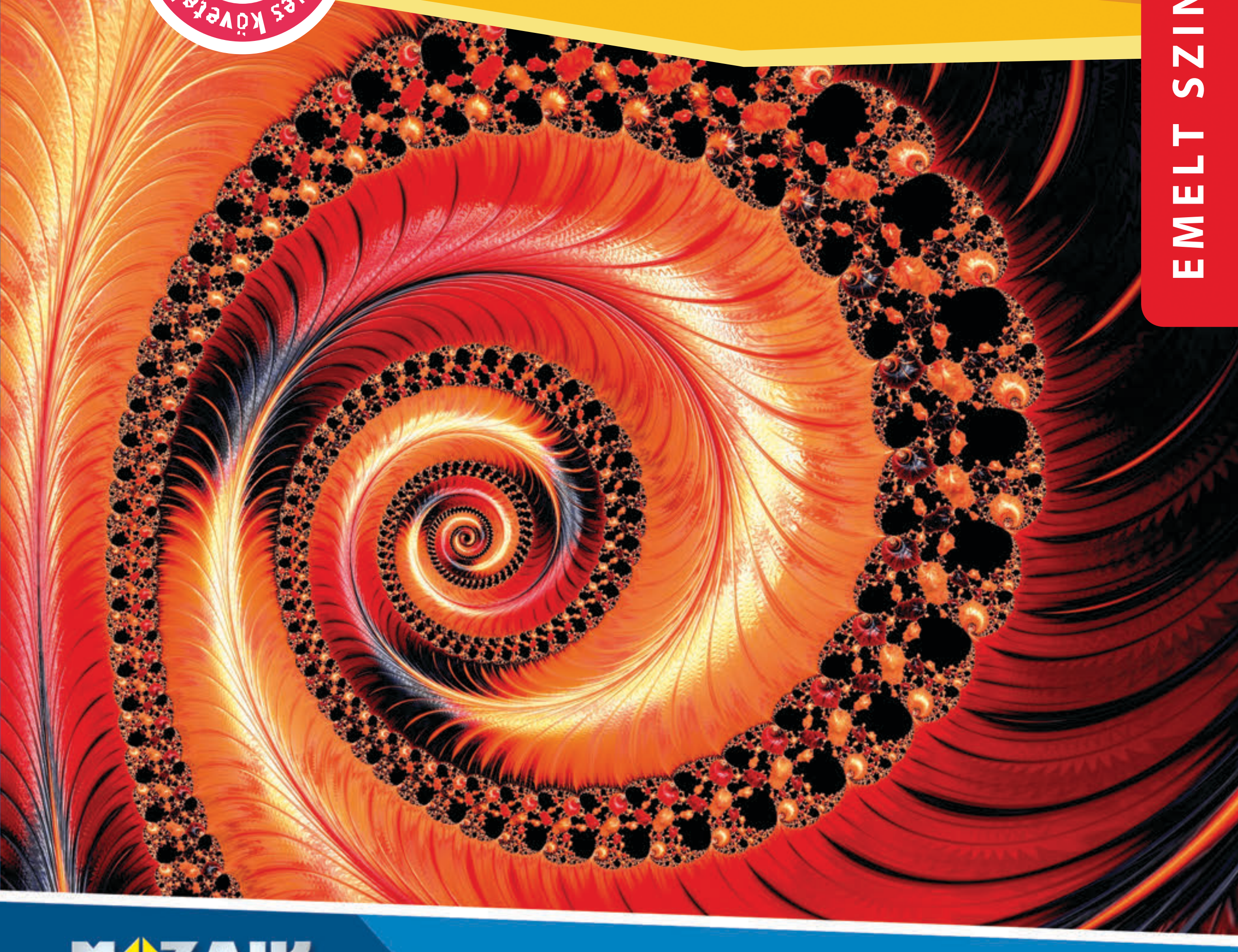
PRÓBAÉRETTSÉGI FELADATSOROK

12 feladatsor megoldásokkal, magyarázatokkal

MATEMATIKA

2017-től érvényes követelmények

EMELT SZINT



MOZAIK

8. feladatsor

A feladatok megoldására 240 perc fordítható.

I. rész

1 *a)* Oldja meg az egyenlőséget a valós számok halmazán!

$$2=\sqrt{0{,}25x^2+x+5}$$

b) Oldja meg az egyenletrendszert az $\mathbb{R}^2$ halmazon!

$$\left.\begin{aligned} x+\frac{9}{y}&=6 \\ \frac{x}{8}+y&=5 \end{aligned}\right\}$$

a 4 | b 8 | ö 12

2 *a)* Legyen H az 1-nél nagyobb pozitív egész számok halmaza. Döntse el az alábbi állításról, hogy igaz vagy hamis! Döntését indokolja!

Az $a, b \in H$ számokra ha a nem osztója b-nek, akkor a és b relatív prím.

b) Fogalmazza meg a fenti állítás megfordítását, és állapítsa meg a megfordítás logikai értékét is! Válaszát indokolja!

c) Határozza meg azon $n \in \mathbb{Z}^+$ számokat, amelyekhez létezik p pozitív prím, hogy az $np + n^p$ összeg is pozitív prím!

a 3 | b 4 | c 7 | ö 14

146

3 Bergengóciában egy 200 km hosszú útszakaszon végig a megengedett legnagyobb sebességgel halad egy személygépkocsi. Ugyanazon az útszakaszon egy teherautó ennél a személyautónál mindig $10\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$-val lassabban közlekedik. A személyautó 15 perccel hamarabb megy végig az úton, mint a teherautó.

a) Mekkora az útszakaszon megengedett legnagyobb sebesség egész $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-ra kerekítve Bergengóciában?

b) Hányféleképpen bonthatunk fel egy hat elemű halmazt két diszjunkt (közös elem nélküli) részhalmazra úgy, hogy mindegyik részhalmaz tartalmazzon legalább egy elemet?

a 9 | b 5 | ö 14

4 *a)* Az *ABC* szabályos háromszög *S* súlypontjának a *BC* oldalra való tükörképe *S*'. Bizonyítsa be, hogy a kialakult *ABS'C* négyszög húrnégyszög!

b) Egy *ABCD* húrnégyszögben $AB = BD = DA$, a *C* csúcs a *D*-hez közelebb harmadolja az *A*-t nem tartalmazó *BD* ívet. Számítsa ki, mekkorák a négyszög szögei!

a 4 | b 7 | ö 11

II. rész

Az 5–9. feladatok közül tetszése szerint választott négyet kell megoldania.
A kihagyott feladat sorszámát írja be ebbe az üres négyzetbe!

5 Egy vidám matematikus három problémával (A, B, C) foglalkozott tegnap, mind a háromhoz kis papírlapra írt különböző ötleteket, számításokat. Az A problémához egy, a B-hez kettő, a C-hez három papírdarabkát használt. A papírlapok az asztalán véletlenszerűen összekeveredtek, talán a huzat fújta őket egymásra. Most szomorúan veszi fel egymás után őket: csak akkor lesz újra vidám, ha valamelyik probléma összes jegyzetét megtalálja.

a 7
b 9
ö 16

a) Az első kérdés, amihez minden jegyzetet megtalál, a B probléma. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy ez pontosan a 4. húzásra sikerül neki!

b) Hányféleképpen következhet be az, hogy a matematikus pontosan a harmadik húzás után lesz újra vidám?

6 Egy szabadidőközpont térképére koordináta-rendszert helyezve, a téglalap alakú labdarúgópálya csúcsai az $A(4; -2)$, $B(7; -2)$, $C(7; 3)$, $D(4; 3)$ pontoknak felelnek meg. Az új városvezetés – részben az elgazosodott focipálya területén – egy kör alakú mesterséges tavat akar kialakítani. A tó tervezett határvonalának egyenlete $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$.

a 4
b 12
ö 16

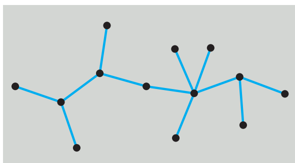
a) Számítsa ki, hány négyzetméter a focipálya, illetve a kör alakú tó területe, ha 1 egység 15 méternek felel meg!

b) A jelenlegi focipályának hány százalékát borítja majd víz, ha elkészül a tó? Válaszát egy tizedes jegyre kerekítve adja meg!

150

7 *a)* Tekintsük az alábbi definíciót!

Hernyógráfnak nevezzük az olyan egyszerű, összefüggő, körmentes gráfokat, amelyekben van egy központi út, és minden más pontja legfeljebb 1 él távolságra van a központi úttól.



a 2
b 5
c 9
ö 16

Igaz-e a következő kijelentés?

Minden hernyógráf fagráf.

b) Egy egyszerű n pontú gráfot három állapotban tekintünk:

A) fa; *B)* minden pont fokszáma 3; *C)* minden pont fokszáma 5.

Határozza meg a pontok számát, ha tudjuk, hogy az *A)*, *B)*, *C)* gráfok éleinek számai ebben a sorrendben egy mértani sorozat első három elemét alkotják!

c) Egy konvex sokszög belső szögei fokban mérve egész számok, és egy olyan számtani sorozat egymást követő tagjai, amelynek differenciája 4°. Határozza meg a feltételeknek megfelelő sokszögek számát!

I. rész

1 *a)* Oldja meg az egyenlőséget a valós számok halmazán!

$2=\sqrt{0{,}25x^2+x+5}$

M: Mivel $0{,}25x^2+x+5$ bármely x-re pozitív ($D<0$ és felfelé nyíló parabola), ezért $x\in\mathbb{R}$. | a | 4 | |

Négyzetre emelve és rendezve másodfokú egyenletet kapunk:

$$0=0{,}25x^2+x+1.$$ **(2 pont)**

Az egyetlen megoldás: **$x=-2$.** **(1 pont)**

Ellenőrzés: $2=\sqrt{0{,}25\cdot(-2)^2-2+5}=\sqrt{1-2+5}=\sqrt{4}.$ **(1 pont)**

b) Oldja meg az egyenletrendszert az $\mathbb{R}^2$ halmazon!

$$\left.\begin{aligned} x+\frac{9}{y}&=6\\ \frac{x}{8}+y&=5\end{aligned}\right\}$$

M: A tört nevezője miatt $y\neq 0$. Szorozzuk a második egyenletet 8-cal: | b | 8 | |

$$\left.\begin{aligned} x+\frac{9}{y}&=6\\ x+8y&=40\end{aligned}\right\}.$$ **(1 pont)**

Vonjuk ki a második egyenletből az elsőt:

$$8y-\frac{9}{y}=34.$$ **(1 pont)**

Szorozzuk fel y-nal és rendezzük mint másodfokú egyenletet:

$$8y^2-34y-9=0.$$ **(1 pont)**

A másodfokú egyenlet megoldásai: $y_1=-0{,}25$ és $y_2=4{,}5$. **(1 pont)**

Visszahelyettesítve az első egyenletbe:

$$x_1+\frac{9}{-0{,}25}=6 \quad\Rightarrow\quad x_1=42,$$ **(1 pont)**

$$x_2+\frac{9}{4{,}5}=6 \quad\Rightarrow\quad x_2=4.$$ **(1 pont)**

Az egyenletrendszer megoldásai:

$x_1=42$; $y_1=-0{,}25$ és $x_2=4$; $y_2=4{,}5$. **(1 pont)**

Ellenőrzés: A második egyenletbe való visszahelyettesítéssel:

$$\frac{42}{8}-0{,}25=5 \qquad \text{és} \qquad \frac{4}{8}+4{,}5=5.$$ **(1 pont)** | ö | 12 | |

2 *a)* Legyen H az 1-nél nagyobb pozitív egész számok halmaza. Döntse el az alábbi állításról, hogy igaz vagy hamis! Döntését indokolja!

Az $a, b \in H$ számokra ha a nem osztója b-nek, akkor a és b relatív prím.

M: Adunk egy ellenpéldát: legyen $a = 4$ és $b = 6$. Ekkor 4 nem osztója 6-nak, de $(4; 6) = 2$. **(2 pont)**

a 3

Az állítás **hamis.** **(1 pont)**

b) Fogalmazza meg a fenti állítás megfordítását, és állapítsa meg a megfordítás logikai értékét is! Válaszát indokolja!

M: A megfordított állítás:

b 4

(Az $a, b \in H$ számokra) ha a és b relatív prím, akkor a nem osztója b-nek. **(1 pont)**

Ha a és b relatív prímek, akkor nincs közös prímtényezőjük. **(1 pont)**

Ha nincs közös prímtényezőjük, akkor $a > 1$ nem lehet osztója b-nek. **(1 pont)**

A megfordított állítás **igaz.** **(1 pont)**

c) Határozza meg azon $n \in \mathbb{Z}^+$ számokat, amelyekhez létezik p pozitív prím, hogy az $np + n^p$ összeg is pozitív prím!

M: Alakítsuk szorzattá a kifejezést: $n(p + n^{p-1})$. **(1 pont)**

c 7

Egy szorzat pontosan akkor prím, ha egyik tényezője prím, a másik 1. **(1 pont)**

$p + n^{p-1} > 1$, hiszen p pozitív prím, n pozitív egész. **(1 pont)**

Vagyis $\boldsymbol{n = 1}$. Ekkor viszont a másik tényező $p + n^{p-1} = p + 1$. **(2 pont)**

p és $p + 1$ egymás utáni prímek, tehát $p = 2$ és $p + 1 = 3$. **(1 pont)**

Ellenőrzés: $1 \cdot 2 + 1^2 = 3$. **(1 pont)**

ö 14

3 Bergengóciában egy 200 km hosszú útszakaszon végig a megengedett legnagyobb sebességgel halad egy személygépkocsi. Ugyanazon az útszakaszon egy teherautó ennél a személyautónál mindig $10\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$-val lassabban közlekedik. A személyautó 15 perccel hamarabb megy végig az úton, mint a teherautó.

a) Mekkora az útszakaszon megengedett legnagyobb sebesség egész $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-ra kerekítve Bergengóciában?

M: Jelölje az útszakaszon megengedett legnagyobb sebességet (kilométer per órában) v, ekkor a teherautó sebessége $v - 10$ $(v > 10)$. **(1 pont)**

a 9

Jelölje az útszakasz megtételéhez a személyautónak szükséges időt (órában) t, ekkor a teherautó (15 perc = 0,25 óra) $t + 0{,}25$ ideig közlekedik. **(1 pont)**

Írjunk fel egyenletrendszert a két jármű adatai alapján:

$$\left.\begin{aligned} t \cdot v &= 200 \\ (t + 0{,}25) \cdot (v - 10) &= 200 \end{aligned}\right\}.$$ **(1 pont)**

II. rész

5 Egy vidám matematikus három problémával (A, B, C) foglalkozott tegnap, mind a háromhoz kis papírlapra írt különböző ötleteket, számításokat. Az A problémához egy, a B-hez kettő, a C-hez három papírdarabkát használt. A papírlapok az asztalán véletlenszerűen összekeveredtek, talán a huzat fújta őket egymásra. Most szomorúan veszi fel egymás után őket: csak akkor lesz újra vidám, ha valamelyik probléma összes jegyzetét megtalálja.

a) Az első kérdés, amihez minden jegyzetet megtalál, a B probléma. Határozza meg annak a valószínűségét, hogy ez pontosan a 4. húzásra sikerül neki!

M: A matematikus nem húzhat A cetlit, mert a B jegyzeteit találja meg elsőnek, negyedikre viszont B-t kell kivennie. Az első három húzás során csak az egyik B és két C cetli kerülhet elő. **(1 pont)**

a 7

Az egy B és két C cetlit háromféle sorrendben húzhatja ki:

$$B–C–C, \quad C–B–C, \quad C–C–B.$$ **(1 pont)**

A két B cetli $2 \cdot 1 = 2$, **(1 pont)**

a C probléma két jegyzete $3 \cdot 2 = 6$-féle módon jöhet elő. **(1 pont)**

A kedvező esetek száma $3 \cdot 2 \cdot 6 = 36$. **(1 pont)**

Az összes esetek száma különböző cetlik esetén $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$. **(1 pont)**

A kérdezett valószínűség:

$$P = \frac{36}{360} = \frac{1}{10} = 0{,}1.$$ **(1 pont)**

b) Hányféleképpen következhet be az, hogy a matematikus pontosan a harmadik húzás után lesz újra vidám?

Vegyük sorra az eseteket!

b 9

(1) Ha a harmadik húzásra C-t húz, akkor az első kettő cetlinek is C-nek kell lennie. Ezeknek a lehetséges sorrendje $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. **(1 pont)**

(2) Ha az utolsó jegyzetlap B, akkor előtte csak egy B és egy C lehet $B–C$ vagy $C–B$ sorrendben (2 lehetőség). **(1 pont)**

A két B lehetséges sorrendje $2 \cdot 1 = 2$. A C cetli 3-féle lehet. **(1 pont)**

Így ennek az összes lehetősége: $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$. **(1 pont)**

(3) Ha a harmadik lap A, akkor előtte egy B és egy C, vagy két C jegyzetlap lehet csak. **(1 pont)**

A két C jegyzet $3 \cdot 2 = 6$ sorrendben fordulhat elő. **(1 pont)**

Az egy B és egy C két módon követheti egymást ($B–C$ vagy $C–B$), **(1 pont)**

a B kettő-, a C háromféle lehet: $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$. **(1 pont)**

A (3) esetben az összes lehetőségek száma $6 + 12 = 18$.

Így az összes lehetséges sorrendek száma: $6 + 12 + 18 = 36$. **(1 pont)**

ö 16

6 Egy szabadidőközpont térképére koordináta-rendszert helyezve, a téglalap alakú labdarúgópálya csúcsai az $A(4; -2)$, $B(7; -2)$, $C(7; 3)$, $D(4; 3)$ pontoknak felelnek meg. Az új városvezetés – részben az elgazosodott focipálya területén – egy kör alakú mesterséges tavat akar kialakítani. A tó tervezett határvonalának egyenlete $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$.

a) Számítsa ki, hány négyzetméter a focipálya, illetve a kör alakú tó területe, ha 1 egység 15 méternek felel meg!

a 4

M: A focipálya oldalai $AB = 3$, $BC = 5$ egység, ami $AB = 45$ és $BC = 75$ méternek felel meg.

$$T_{\text{pálya}} = 45 \cdot 75 = 3375 \text{ m}^2. \quad \textbf{(1 pont)}$$

A kör sugarához alakítsuk át az egyenletet:

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 25. \quad \textbf{(1 pont)}$$

Ebből a sugár négyzetére

$$r^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad r = 5 \text{ egység},$$

ami 75 méternek felel meg. **(1 pont)**

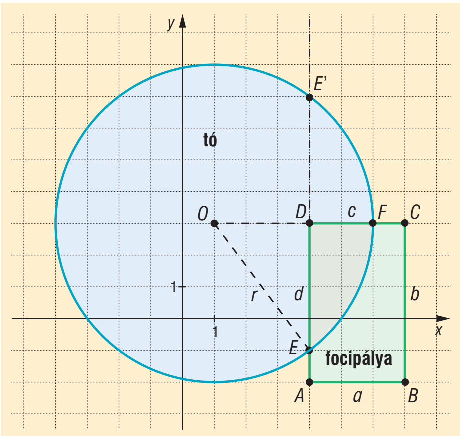
$$T_{\text{tó}} = r^2\pi = 75^2 \cdot \pi \approx \mathbf{17\,671{,}46 \ m^2}. \quad \textbf{(1 pont)}$$

Megfelelő kerekítés elfogadható.

b) A jelenlegi focipályának hány százalékát borítja majd víz, ha elkészül a tó? Válaszát egy tizedes jegyre kerekítve adja meg!

b 12

M: Modellezzük koordináta-rendszerben a feladatot!



$O(1; 3)$, $r = 5$. **(1 pont)**

Legyenek E, F a téglalap és a körlap határoló vonalainak metszéspontjai.

OED háromszög derékszögű. **(1 pont)**

Ekkor az átfedés területe kiszámítható az OEF körcikk és OED háromszög területei különbségeként:

$$T_{\text{közös rész}} = T_{OEF\text{ körcikk}} - T_{OED\triangle}.$$ **(1 pont)**

E az AD oldalon van az x tengely alatt, így $E(4; y)$, ahol $y < 0$. **(1 pont)**

Mivel a körön is rajta van, ezért

$$(4 - 1)^2 + (y - 3)^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad y^2 - 6y - 7 = 0. \quad \textbf{(1 pont)}$$

Innen $y_1 = 7$ és $y_2 = -1$. Az egyik metszéspont $E'(4; 7)$, illetve $E(4; -1)$. **(1 pont)**

(Az E pont koordinátáit OED háromszög már ismert oldalai ($OD = 3$ és $OE = 5$) és a Pitagorasz-tétel alapján is megadhatjuk.)