Árki Tamás
Konfárné Nagy Klára
Kovács István
Trembeczki Csaba
Urbán János

sokszínű

Matematika

FELADATGYŰJTEMÉNY

Megoldásokkal

9

ÉRETTSÉGI

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatokkal

MOZAIK

Árki Tamás
Konfárné Nagy Klára
Kovács István
Trembeczki Csaba
Urbán János

sokszínű

Matematika

FELADATGYŰJTEMÉNY

Gyakorló és érettségire felkészítő feladatokkal

9

Megoldásokkal

Kilencedik, változatlan kiadás

Mozaik Kiadó – Szeged, 2019

Tisztelt Olvasó!

Feladatgyűjtemény-sorozatunk egyedülálló a középiskolai matematika feladatgyűjtemények között. A könyvek felépítése pontosan követi a *Sokszínű matematika* tankönyvcsalád köteteinek szerkezetét, így akik ezekből a tankönyvekből tanulnak, közvetlenül alkalmazhatják az órai munka és az önálló gyakorlás, sőt az érettségi felkészülés során is.

Ugyanakkor – mivel a feladatgyűjtemények felépítése természetesen megfelel a tantárgy belső logikájának és az iskolákban általánosan alkalmazott kerettanterveknek – minden nehézség nélkül használhatják azok is, akik más tankönyvekből tanulják, illetve tanítják a matematikát.

A feladatok nagy száma és változatossága miatt a tanulók bőségesen találnak a maguk számára kitűzött szintnek megfelelő gyakorlási lehetőséget. Így a tankönyveket és a feladatgyűjteményt együtt használva kellő jártasságot szerezhetnek a feladatmegoldásban.

Az egyes fejezetek végén található *Vegyes feladatok* áttekintést adnak az adott fejezet anyagából, ezért jól segíthetik az átfogóbb számonkérés előtti felkészülést.

A feladatok nehézségének jelölése

Minden fejezetben három különböző szintre bontva találjuk a feladatokat:

1198 **Gyakorló feladatok:** olyan feladatok, amelyek – akár a tanórákon, akár házi feladatként – elősegítik a megtanult ismeretek elmélyítését. *(narancssárga színű feladatsorszám)*

1430 **Középszintű feladatok:** az adott témakörben más témákhoz is kapcsolódó problémák, melyek megoldása elősegíti a tantárgy komplex ismeretanyagának ismétlését, a matematikai kompetenciák elsajátítása mellett azok alkalmazását. *(kék színű feladatsorszám)*

1758 **Emelt szintű feladatok:** az emelt szintű érettségire való felkészülést segítő problémák, melyek nemcsak megoldásuk nehézségében különböznek az előzőektől, hanem felvillantják a matematika szépségét is. *(bordó színű feladatsorszám)*

A feladatok sorszámozása

A feladatgyűjtemények feladatainak sorszámozása a tankönyvcsalád egyes köteteire utal.

A 9. évfolyam feladatai az 1001-es, a 10. évfolyam feladatai a 2001-es, a 11. évfolyamé a 3001-es, a 12. évfolyamé pedig a 4001-es sorszámtól kezdődnek.

A 12.-es kötetben a négy év anyagát áttekintő rendszerező összefoglalás feladatai az 5001-es sorszámtól indulnak, ezáltal segíti a feladatok közötti válogatást az érettségire történő felkészüléskor.

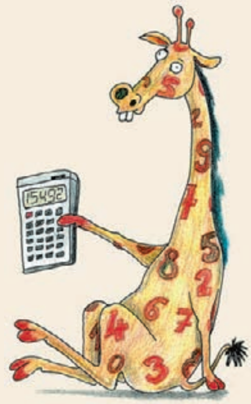
Megoldások

A feladatgyűjtemény minden feladat megoldását tartalmazza. A gyakorló feladatok esetén csak a végeredményt közöljük, más esetekben pedig annyira részletezzük a megoldásokat, amennyire azt pedagógiai szempontból szükségesnek tartottuk.

A kitűzött feladatok megoldásához jó munkát és jó tanulást kívánunk!

A szerzők

TARTALOMJEGYZÉK



9.5. *Egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek* (1475–1570)

9.6. *Egybevágósági transzformációk* (1571–1759)

9.7. *Statisztika* (1760–1807)

A feladatgyűjteményben használt matematikai jelölések

Jelölés	Magyarázat
$\mathbb{N}$	a természetes számok halmaza
$\mathbb{Z}$	az egész számok halmaza
$\mathbb{Z}^+$; $\mathbb{Z}^-$	a pozitív egész számok halmaza; a negatív egész számok halmaza
$\mathbb{Q}$; $\mathbb{Q}^*$	a racionális számok halmaza; az irracionális számok halmaza
$\mathbb{Q}^+$; $\mathbb{Q}^-$	a pozitív racionális számok halmaza; a negatív racionális számok halmaza
$\mathbb{R}$	a valós számok halmaza
$\mathbb{R}^+$; $\mathbb{R}^-$	a pozitív valós számok halmaza; a negatív valós számok halmaza
$a \in A$; $b \notin A$	a eleme az A halmaznak; b nem eleme az A halmaznak
$A \subseteq B$	A halmaz részhalmaza B halmaznak
$C \subset D$	C halmaz valódi részhalmaza D halmaznak
$E \not\subset F$	E halmaz nem részhalmaza F halmaznak
$A \cup B$; $C \cap D$; $E \setminus F$	A és B halmaz uniója; C és D halmaz metszete; E és F halmaz különbsége
$\emptyset$, $\{\}$	üres halmaz
$\overline{A}$	az A halmaz komplementere
$\lvert A \rvert$	az A halmaz elemszáma
$A \Rightarrow B$; $C \Leftrightarrow D$	ha A, akkor B; C akkor és csak akkor, ha D
$[a; b]$	a, b zárt intervallum
$[a; b[$	a, b balról zárt, jobbról nyitott intervallum
$]a; b]$	a, b balról nyitott, jobbról zárt intervallum
$]a; b[$	a, b nyitott intervallum
$n!$	n faktoriális: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$
$f: x \mapsto$	az f függvény hozzárendelési szabálya
$f(x_0)$	az f függvény helyettesítési értéke az x_0 helyen
$\lvert x \rvert$	az x szám abszolút értéke
$[x]$	az x szám egészrésze
$\{x\}$	az x szám törtrésze
$\sqrt{x}$	az x szám négyzetgyöke
$\sqrt[n]{x}$	az x szám n-edik gyöke
$a \mid b$	az a szám osztója a b számnak
(a, b)	az a és b szám legnagyobb közös osztója
$[a, b]$	az a és b szám legkisebb közös többszöröse
$\overrightarrow{AB}$	az A pontból B pontba mutató vektor
$\vec{a}$, $\vec{0}$	a vektor, nullvektor
$\sphericalangle$	szög

Feladatok

9.2. ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET

Betűk használata a matematikában

1107 Adjuk meg – algebrai kifejezéseket használva – azokat a

a) pozitív egész számokat, amelyek 5-tel osztva 4 maradékot adnak;
b) pozitív egész számokat, amelyek 8-cal osztva 5 maradékot adnak;
c) egész számokat, amelyek két nullára végződnek;
d) pozitív egész számokat, amelyek 17-re végződnek;
e) racionális számokat, amelyeknek a számlálója 7, a nevezője pedig a 3 többszöröse;
f) racionális számokat, amelyeknek a számlálója 4-nek többszöröse, nevezője pedig 3-mal nagyobb a számlálónál.

1108 Milyen számokat határoznak meg a következő kifejezések?

a) $9n$, ha n pozitív egész szám;
b) $8n-3$, ha n pozitív egész szám;
c) $100n+23$, ha n pozitív egész szám;
d) $2-a$, ha a egész szám;
e) n^2+1, ha n egész szám;
f) $\frac{3x-1}{10}$, ha x pozitív egész szám.

1109 Az alábbi kifejezéseket állítsuk együtthatóik szerint növekvő sorrendbe:

a) $3{,}8xyz$; $-0{,}8x\cdot 5z$; $-3x\cdot(-1{,}2yz)$; $2x\cdot(-2{,}1y)$; $4x\cdot(-0{,}7yz)$;
b) $-4{,}2a^2$; $4a\cdot(-1{,}5b)$; $2a\cdot(-3b)$; $\left(-2b^2\right)\cdot(3{,}5a)$; $\left(-2{,}2a^4\right)\cdot 2b$.

1110 Számítsuk ki az alábbi kifejezések helyettesítési értéket, ha $a=4$, $b=-1{,}2$ és $c=\frac{5}{6}$:

a) $6c-2a$;
b) $4a^2-5b$;
c) $a+6bc$;
d) $-2a-5b+12c$;
e) $\frac{-3abc}{2a+1}$;
f) $2\cdot\left(\frac{a-b}{c}+\frac{c}{a}\right)$.

1111 Adjuk meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, melyen az alábbi kifejezések értelmezhetők:

a) $\frac{17x-3}{x}$;
b) $\frac{4x-6}{x+2}$;
c) $\frac{3a-1}{2a+3}$;
d) $\frac{2x-3}{x}+\frac{4x+1}{x-1}$;
e) $\frac{1}{5x-4}-\frac{3x-1}{3x+1}$;
f) $\frac{a+1}{2a+7}-\frac{a-2}{8a-3}$;
g) $1-\frac{5y-6}{y^2-9}+\frac{3-y}{4-y^2}-\frac{3y+1}{1+y^2}$.

1112 Egy háromszög oldalai egymást követő páros számok. Mekkora a háromszög kerülete, ha a legkisebb oldal hossza $2x-2$? Mekkora értékeket vehet fel az x?

1113 Egy szám hárommal osztva 2, egy másik néggyel osztva 3 maradékot ad. Tizenkettővel osztva mennyi a maradéka

a) az egyes számoknak;
b) a két szám összegének?

Hatványozás, a számok normálalakja

1114 Vizsgáljuk meg, melyik szám a kisebb az alábbi esetekben:

a) 2^6 vagy 4^4; *b)* 4^8 vagy 8^4; *c)* 9^3 vagy 3^9;
d) 8^5 vagy 16^4; *e)* 6^3 vagy $27 \cdot 16$; *f)* 27^7 vagy 81^5;
g) 10^{15} vagy $8^4 \cdot 125^5$; *h)* 40^{100} vagy 100^{50}.

1115 Zsebszámológép használata nélkül számítsuk ki a következő kifejezések értékeit:

a) $\dfrac{27 \cdot 16}{6^3}$; *b)* $\dfrac{12^5}{9^2 \cdot 4^4}$; *c)* $\dfrac{16^3 \cdot 4^2 \cdot 8^2}{32^4}$;

d) $\dfrac{18^4 \cdot 256 \cdot 72^2}{24^4 \cdot 36^3}$; *e)* $\left(\dfrac{6^6 \cdot 10^2}{9^3 \cdot 200 \cdot 32}\right)^3$; *f)* $\dfrac{6^7 \cdot 15^5 \cdot 35^5}{3^5 \cdot 10^6 \cdot 21^5 \cdot 25^2}$.

1116 Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket:

a) $\left(a^7\right)^3 \cdot \left(a^4\right)^5$; *b)* $\left[\left(x^2\right)^2\right]^3 \cdot \left[\left(x^3\right)^2\right]^4$; *c)* $\dfrac{\left(x^3\right)^5 \cdot x^8}{\left(x^4\right)^3}$;

d) $\dfrac{\left(b^2\right)^6 \cdot b^5}{\left(b^3\right)^4 \cdot \left(b^2\right)^2}$; *e)* $\dfrac{\left(x^4\right)^4 \cdot \left(x^5\right)^5}{\left(x^3\right)^3 \cdot \left(x^3\right)^2}$; *f)* $\dfrac{\left(a^3 \cdot b\right)^4 \cdot \left(a \cdot b^2\right)^3}{\left(a^4 \cdot b^2\right)^2 \cdot \left(a \cdot b\right)^3}$;

g) $\left(\dfrac{a^2}{b}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{b^3}{a^4}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{a^5}{b}\right)^2$; *h)* $\dfrac{\left(c^4 \cdot d^3\right)^5 \cdot \left(c^7\right)^2 \cdot d^3}{\left(c^3\right)^2 \cdot \left(d^6 \cdot c^5\right)^4}$.

1117 Számítsuk ki a következő műveletek eredményét:

a) 3^{-4}; *b)* $(-5)^{-3}$; *c)* $\left(2^{-1}\right)^{-3}$;

d) $\left(\dfrac{1}{7}\right)^{-2}$; *e)* $\left(-\dfrac{5}{3}\right)^{-3}$; *f)* $\left(\dfrac{4}{5}\right)^{-2}$;

g) $\left[\left(-\dfrac{3}{2}\right)^{-1}\right]^2$; *h)* $\left(-\dfrac{2}{5}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{-2}{5}\right)^3$; *i)* $\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}\right]^{-4} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-6}$;

j) $\dfrac{\left(7^{-5}\right)^2 \cdot \left(7^{-3}\right)^{-4}}{\left(7^{-6}\right)^{-2} \cdot 7^{-11}}$.

1118 *a)* A 2-nek hányadik hatványai a következő törtek?

$$\frac{1}{4},\quad \frac{1}{16},\quad \frac{1}{32},\quad \frac{1}{256},\quad \frac{1}{1024},\quad \frac{1}{\left(2^{-5}\right)^6}$$

b) A 3-nak hányadik hatványai a következő törtek?

$$\frac{1}{9},\quad \frac{1}{27},\quad \frac{1}{81},\quad \frac{1}{243},\quad \frac{1}{3^{11}},\quad \frac{1}{\left(3^{-5}\right)^8}$$

1119 Végezzük el a következő hatványozásokat, és hozzuk egyszerűbb alakra a kifejezéseket:

a) $(a^3)^{-2}\cdot(a^{-2})^{-4}\cdot(a^{-1})^{-1}$; *b)* $(x^{-2})^{-4}\cdot\left[(x^3)^{-3}\right]^{-2}\cdot(x^2)^{-8}$; *c)* $(2a^{-3})^{-1}\cdot 2^{-2}\cdot a^{-4}$;

d) $(a^{-1}\cdot b^{-3})^{-2}\cdot(a^{-4}\cdot b^{-2})^{-1}$; *e)* $\left(\frac{5^{-2}\cdot b^{-1}}{b^{-4}}\right)^{-3}\cdot\frac{b^{-3}}{5^{-4}}$; *f)* $\frac{(c^{-3})^{-1}\cdot c^{-4}\cdot c^{-1}}{c^{-2}\cdot(c^{-3})^{2}\cdot c}$;

g) $\left(\frac{a^{-2}}{b^3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{b^{-4}}{a^{-3}}\right)^{2}\cdot\left(\frac{b^{-1}}{a^4}\right)^{-5}$; *h)* $\frac{(3d^2)^{-2}\cdot(9^{-2}\cdot d^{-5})^{-2}}{(3^3\cdot d^{-4})^{3}\cdot(3d^3)^{-1}}$; *i)* $\frac{(12^{-3}\cdot e^{-1})^{-2}\cdot(18^2\cdot e^3)^{-3}}{(8^{-2}\cdot e^{-4})^{2}\cdot(3^{-5}\cdot e^3)^{2}}$.

1120 Zsebszámológép használata nélkül döntsük el, hogy melyik szám a nagyobb az alábbi esetekben:

a) 6^{-3} vagy 3^{-6}; *b)* 8^{-4} vagy 4^{-8}; *c)* 10^{-20} vagy 20^{-10};

d) $\left(\frac{4}{7}\right)^{-3}$ vagy $\left(\frac{5}{7}\right)^{-3}$; *e)* $5^{-3}\cdot 7^2$ vagy $\left(\frac{7}{5}\right)^{3}$; *f)* $\frac{9^{-3}\cdot 27^{-2}}{81^{-5}}$ vagy $\left(\frac{1}{3}\right)^{-8}$;

g) $(2^{-1}+2^{-2}-2^{-3})^{-1}$ vagy 1,6.

1121 *a)* Adjuk meg a testtömegünket grammban, illetve tonnában, írjuk fel az eredményt normálalakban.
b) Egy ember átlagos tömege 58 kg, és 6,5 milliárd ember él a Földön. Mennyi az emberiség összes tömege grammban és tonnában?

1122 *a)* Mennyi idő alatt tesz meg a fény 1 mm-t, ha a sebessége $3\cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$?
b) Mennyi utat tesz meg a fény 45 perc alatt?

1123 Hányadik hatványra kell emelni a 4^4-t, hogy 8^8 legyen belőle?

1124 Hány nullára végződik a $2^{2007}\cdot 125^{345}\cdot 25^{200}$ szorzat?

1125 A következő állításokról döntsük el, hogy melyik igaz és melyik hamis.
a) A pozitív számok minden egész kitevőjű hatványa pozitív.
b) Az egész számok minden pozitív egész kitevőjű hatványa pozitív.
c) A negatív egész számoknak van olyan negatív egész kitevőjű hatványa, amely pozitív.
d) A pozitív egész számok egész kitevőjű hatványai is pozitív egészek.
e) Az egész számok negatív egész kitevőjű hatványai nem egész számok.

1126 Ha három hangya tömege 1 gramm, akkor mennyi a tömege a 20 millió hangyát tartalmazó hangyabolynak?

1127 Egy baktériumtenyészetben a baktériumok száma óránként háromszorosára növekszik.
a) Ha az időmérés kezdetén 1 baktérium van a tenyészetben, mennyi lesz a baktériumok száma az ötödik óra végén?
b) Hányszorosára növekszik a baktériumszám a tizedik óra kezdetétől a tizenharmadik óra végéig?

1128 Az egyik legfényesebb csillag, az Altair 16,5 fényév távolságra van a Földtől.
a) Adjuk meg a távolságot méterben, ha a fény terjedési sebessége $3\cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
b) Hányszorosa ez a távolság a Nap–Föld-távolságnak, amely közelítőleg $1{,}5\cdot 10^8$ km?

1129 Az egyik héten az ötös lottón minden kihúzott szám ugyanazon egész szám egész kitevős hatványa volt. Melyek voltak a kihúzott számok? Hány eset lehetséges?

Egész kifejezések, nevezetes szorzatok, a szorzattá alakítás módszerei

1130 Az alábbi kifejezésekben végezzük el a lehetséges műveleteket, és rendezzük a tagokat csökkenő fokszám szerint:

a) $3a - 2a^2 - 4 + a^2 + a - 4a^2 - 5a + 1 - a^2 + 2a$;

b) $3b - b^3 + 4b^2 - 1 + 4b^3 - 2b^2 - 4b + 2 - 2b^3 - b^2 + b - 4 + 2b^2$;

c) $3cd^2 - 4c^2 + d + 2c^2 - d^2c + 5d - 4cd^2 + 3 - d - c^2 - cd^2$;

d) $(3a^2 - 2a + 1) - (a^2 - a - 3) - (a^2 + 5a - 2)$;

e) $(2x^2 - x - 3) - (x^2 - 3x - 4) - (-2x^2 + 4x + 1) - (3x^2 - 2x - 1)$;

f) $2 \cdot (a^2 - a + 1) + 3 \cdot (a^2 + 2a - 3) - 4 \cdot (a^2 + 3a + 4)$;

g) $2 \cdot (x^3 - 2x^2 + 2) + 3 \cdot (x^2 + x - 1) - 4 \cdot (x^3 - 2x^2 + 4x - 1) - (x^3 - x^2 + x + 1)$;

h) $3x \cdot (2x^2 - x + 2) - 2x^2 \cdot (3x - 2) - 3 \cdot (x^3 + 2x^2 + x - 4) - x \cdot (x^2 - x - 3) + 4x^3 + 4x^2 + 2x - 4$;

i) $(3a - 1) \cdot (2a + 3) - (4a - 2) \cdot (3a + 5)$;

j) $2 \cdot \left[(3x^2 - 1) + (2x - 2) \cdot (3x - 1)\right] - \left[2x^2 + 3 \cdot (2x + 1) - x\right] - 3$;

k) $3x - \left\{2x - \left[3x + 1 - (2x - 1)\right] - 3\right\} - \left\{4 - \left[x - (3x - 4) + 2x\right] + x\right\}$;

l) $(4x + 1) \cdot (3x - 2) - 2 \cdot \left\{3 - 2 \cdot \left[(x - 3) \cdot (2x + 1) - x \cdot (3x + 1)\right] - x^2\right\} + (2x + 3) \cdot (x - 2)$.

1131 Határozzuk meg a következő kifejezések értékét, ha $a = -2$, $b = \dfrac{2}{3}$:

a) $2a - 1 + 4b - a + 3b + 6 - 4a - 10b + 3a - 2$;

b) $2b + 5 - 2a + 4a - 3b - 1 + 4b - 3a - 7 - 3b$;

c) $(3a - 2) \cdot (a - 1) - 3a^2 + 3a - 1$;

d) $(4a - b) \cdot (2a + 1) - (8a + 3) \cdot (a + 2) - 2b + 2ab$;

e) $(3a - 2) \cdot (2a - b) - 6 \cdot (a - 3) \cdot (a + b) - b \cdot (11 - 9a)$;

f) $4a - \left\{4 - \left[6b - 2 \cdot (a - 2) - a\right]\right\}$.

1132 Végezzük el a következő négyzetre emeléseket:

a) $(a + 7)^2$; *b)* $(8 - b)^2$; *c)* $(-7 + b)^2$; *d)* $(3y + 2x)^2$;

e) $(4x - 3y)^2$; *f)* $(10a - 3b)^2$; *g)* $(x^2 + 3z)^2$; *h)* $\left(2x^3 - 3y^2\right)^2$;

i) $\left(8a^3 - 5b^2\right)^2$; *j)* $\left(\dfrac{2}{3} \cdot x + \dfrac{1}{4} \cdot y\right)^2$; *k)* $\left(\dfrac{5}{6} \cdot x - \dfrac{7}{3} \cdot y\right)^2$; *l)* $(z + 2x + y)^2$;

m) $(3x + 2y - z)^2$; *n)* $\left(4x - \dfrac{2}{5} \cdot y - \dfrac{1}{7} \cdot z\right)^2$.

1133 Melyik kifejezés négyzete a következő kifejezés?

a) $a^2 + 8a + 16$; *b)* $b^2 - 10b + 25$; *c)* $c^2 + 14c + 49$;

d) $x^2 - 40x + 400$; *e)* $d^4 - 20d^2 + 100$; *f)* $x^8 + 10x^4 + 25$;

g) $x^6 + 6x^3y^5 + 9y^{10}$; *h)* $0{,}25x^2 - 6xy^3 + 36y^6$; *i)* $\dfrac{4}{9} \cdot x^4 + \dfrac{1}{3} \cdot yx^2 + \dfrac{1}{16} \cdot y^2$.

1134 Bontsuk fel a zárójeleket:

a) $(a+3)^3$; *b)* $(2b-1)^3$; *c)* $\left(3c^2+4\right)^3$;

d) $\left(4d^3-2x^2\right)^3$; *e)* $\left(0{,}5x^2+2y\right)^3$; *f)* $\left(\frac{2}{3}\cdot x-\frac{4}{5}\cdot y\right)^3$.

1135 Végezzük el a következő műveleteket:

a) $(3a+5)\cdot(3a-5)$; *b)* $(8x-7)\cdot(8x+7)$;

c) $(4b-2x)\cdot(4b+2x)$; *d)* $(6a+5b)\cdot(6a-5b)$;

e) $(5c-3y)\cdot(5c+3y)$; *f)* $(5a^3+1)\cdot(5a^3-1)$;

g) $(3d^2-8)\cdot(3d^2+8)$; *h)* $(9x^2+2y)\cdot(2y-9x^2)$;

i) $(7e^5+10x^3)\cdot(7e^5-10x^3)$; *j)* $\left(\frac{2}{7}\cdot x^7-\frac{1}{3}\cdot y^3\right)\cdot\left(\frac{2}{7}\cdot x^7+\frac{1}{3}\cdot y^3\right)$.

1136 Végezzük el a következő műveleteket:

a) $(3a-1)^2-(2a+3)\cdot(2a-3)+(a+2)^2$;

b) $(4x+3)\cdot(4x-3)-(3x+2)^2+(x-7)^2$;

c) $(5x+4)^2-(3x-4)^2-(2x+3)\cdot(2x-3)$;

d) $(x-5)^2-(2x+5)\cdot(2x-5)+(3x+1)^2-(2x-1)^2$;

e) $(4b-5)^2+3\cdot(4-b)\cdot(4+b)-(2b+4)^2-(4b-3)^2$;

f) $2\cdot(5x+1)^2-3\cdot(4x-1)\cdot(4x+1)-2\cdot(x-4)^2-(3x+2)^2$;

g) $(2c-1)^3+(3c+2)^2-8c\cdot(c-2)\cdot(c+2)+3\cdot(c-5)^2$;

h) $(x-2y)^3-(3x+y)^2-(4x-2y)\cdot(4x+2y)+(3y-x)^2$;

i) $(x^2-2x)^2+2\cdot(x^2+3)\cdot(x^2-3)-5\cdot(x^2+1)^2$;

j) $\left(2y-\frac{1}{2}\cdot x\right)\cdot\left(2y+\frac{1}{2}\cdot x\right)+\left(\frac{1}{2}\cdot x-y\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\cdot y\right)^2$.

1137 Bontsuk fel a zárójeleket:

a) $(a-1)\cdot(a^2+a+1)$; *b)* $(b+5)\cdot(b^2-5b+25)$; *c)* $(3x+4)\cdot(9x^2-12x+16)$.

1138 Alakítsuk teljes négyzetté az alábbi kifejezéseket:

a) x^2-2x-3; *b)* a^2+4a+6; *c)* a^2+6a+1;

d) $x^2-8x+20$; *e)* $a^2-10a+2$; *f)* $x^2+12x+50$;

g) $x^2+14x+31$; *h)* $2x^2-16x+26$; *i)* $-x^2-6x+3$;

j) $-x^2+12x+1$; *k)* $3x^2+12x+2$; *l)* $-5x^2-20x-7$.

1139 Alakítsuk szorzattá az alábbi kifejezéseket:

a) $3a^3-2a^2+a$; *b)* $6x^3-10x^2+2x$; *c)* $4b^4+8b^3+28b^2-4b$;

d) $35x^3+15x^2+20x$; *e)* $6a^4-9a^3+3a^2$; *f)* $4x^5-24x^4+12x^3$;

g) $5a^3b^2-15a^2b^3+10a^2b$; *h)* $17a^3b^5+17a^2b^6-34ab^4$; *i)* $16a^4b^3+24a^2b^4-40a^4b^4$.

1140 A csoportosítás módszerével alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket:

a) $ab+3b-2a-6$; *b)* $2ax+bx+2a+b$; *c)* $2ax+5y+10x+ay$;

d) $ab-8x+4a-2bx$; *e)* $6a-bx-2b+3ax$; *f)* $4ax+2b-8bx-a$;

g) $6ax+20b+15a+8bx$; *h)* $20bx^2+a-4x^2-5ab$; *i)* $9a^2+8b^3x^2-6a^2x^2-12b^3$.

1141 Alakítsuk szorzattá az alábbi kifejezéseket:

a) $16x^2 - 25$; *b)* $49a^2 - 100b^2$; *c)* $64b^2 - 9x^2$;
d) $36x^4 - 121y^6$; *e)* $x^2 - 20x + 100$; *f)* $36a^2 - 84a + 49$;
g) $\frac{4}{25} \cdot x^2 + 4x + 25$; *h)* $16x^4 - 1$; *i)* $16 - 81x^4$;
j) $4a^4 + 49b^6 + 28a^2b^3$; *k)* $6x^2 + 12x + 6$; *l)* $4x^3 - 24x^2 + 36x$;
m) $3x^4 + 12x^3 + 12x^2$; *n)* $5x^6 - 40x^4 + 80x^2$; *o)* $1 - x^{12}$;
p) $x^2 + 8x + 15$; *q)* $x^2 - x - 12$; *r)* $4x^4 - 13x^2 - 12$;
s) $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$; *t)* $27a^3 - 27a^2b + 9ab^2 - b^3$; *u)* $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$;
v) $a^3 - 27$; *w)* $x^3 + 64$; *x)* $27a^3 + 125b^3$.

1142 Zsebszámológép használata nélkül számítsuk ki a következő műveletek eredményét:

a) $9998 \cdot 10\,002$; *b)* $\dfrac{526^2 - 74^2}{726^2 - 274^2}$; *c)* $\dfrac{54321 \cdot 54325 - 54323 \cdot 54320}{54323 \cdot 54322 - 54321^2}$.

1143 Az a és b számokról azt tudjuk, hogy $a + b = 23$ és $a \cdot b = -7$. Számítsuk ki $a^2 + b^2$ értékét.

1144 Mennyi az együtthatók összege az $\left(x^2 - 3x + 1\right)^{2007}$ kifejezés polinom alakjában?

1145 Egy téglalap kerülete 74 cm. A téglalap minden oldalára kifelé négyzeteket rajzolunk. A négy négyzet területének összege 1642 cm^2. Mekkora a téglalap területe?

1146 Két szám különbsége 2, a szorzatuk 7. A számok megadása nélkül határozzuk meg a köbeik különbségét.

Műveletek algebrai törtekkel

1147 Egyszerűsítsük a következő törteket:

a) $\dfrac{27a^5b^2}{12a^2b^3}$; *b)* $\dfrac{3x^4 \cdot (x-2)}{6x^3 \cdot (x-2)}$; *c)* $\dfrac{32a \cdot (a-5)}{24a^2 \cdot (5-a)}$;

d) $\dfrac{10a^4 + 30a^2}{5a^3 + 15a}$; *e)* $\dfrac{-8a^5 - 8a^3}{10a^3 + 10a}$; *f)* $\dfrac{12x^2y^2 + 20xy^3}{6x^2y + 10xy^2}$;

g) $\dfrac{6ax + 9a + 8x + 12}{3ax + 15a + 4x + 20}$; *h)* $\dfrac{4x^2 - 4x + 1}{1 - 4x^2}$; *i)* $\dfrac{9x^2 - 25}{12x^2 - 20x}$;

j) $\dfrac{8xy - 6y - 3 + 4x}{16x^2 - 9}$; *k)* $\dfrac{x^2 + 2x - 24}{x^2 + 12x + 36}$; *l)* $\dfrac{6x^2 - 2x - 20}{3x^2 + 11x + 10}$.

1148 Végezzük el a következő szorzásokat és osztásokat, és egyszerűsítsük az eredményt:

a) $\dfrac{17a^3b^2}{50x^4y^2} \cdot \dfrac{10x^3y}{34a^2b}$; *b)* $\dfrac{4a^5b^2}{27x^2y^4} : \dfrac{32a^6b}{81xy^6}$;

c) $\dfrac{x^2 + xy}{xy - y^2} \cdot \dfrac{xy^2 - y^3}{x^3 + x^2y}$; *d)* $\dfrac{20a^4 - 15a^3b}{7a^2 + 2ab} : \dfrac{40ab^2 - 30b^3}{14ab^3 + 4b^4}$;

e) $\dfrac{ab-3a}{a^2b+2a^2}\cdot\dfrac{b^2-4}{b^2-6b+9}$; f) $\dfrac{9b^2-6b+1}{9b^2-1}\cdot\dfrac{9b^2+6b+1}{3b^2-b}$;

g) $\dfrac{16-x^2}{16x-8x^2+x^3}:\dfrac{x^4+8x^3+16x^2}{4x^3-x^4}$; h) $\dfrac{10a^7-20a^6+10a^5}{4a^6+8a^5+4a^4}\cdot\dfrac{2a^3+6a^2+6a+2}{5a^4-5a^2}$.

1149 Végezzük el a következő algebrai törtek összevonását:

a) $\dfrac{5}{2x}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2x}{5}$; b) $\dfrac{3}{4y^2}+\dfrac{1}{2y}-\dfrac{5}{y}$;

c) $\dfrac{6a+7}{a^2+a}-\dfrac{5}{a+1}$; d) $\dfrac{a+1}{8a+3}+\dfrac{5a}{24a+9}$;

e) $\dfrac{x+2}{2x-1}-\dfrac{4x+1}{4x-2}+\dfrac{3-x}{10x-5}$; f) $\dfrac{2a+1}{9a+15}+\dfrac{a-2}{3a+5}-\dfrac{5a-2}{12a+20}$;

g) $\dfrac{3x+1}{21-9x}+\dfrac{x+2}{3x-7}-\dfrac{x+1}{6x-14}$; h) $\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{2x-3}{2-x}+\dfrac{x^2+2x+4}{x^2-4}$;

i) $\dfrac{x+2}{3x+2}+\dfrac{3x-1}{3x-2}+\dfrac{3x^2+7x-2}{4-9x^2}$; j) $\dfrac{y}{y+5}-\dfrac{5y+9}{y^2+10y+25}-\dfrac{2y}{3y+15}$;

k) $\dfrac{x+5}{4x^2-25}-\dfrac{x-1}{4x^2+20x+25}+\dfrac{1}{2x+5}$; l) $\dfrac{y-3}{y^2+2y+1}-\dfrac{1}{y+1}-\dfrac{3-y^2}{y^3+3y^2+3y+1}$.

1150 A változók mely értékei esetén vannak értelmezve a következő kifejezések? Hozzuk őket egyszerűbb alakra.

a) $\dfrac{\left(a^2+b^2-c^2\right)^2-\left(a^2-b^2+c^2\right)^2}{4ab^2+4abc}$; b) $\dfrac{a^2b-ab^2}{a^2-b^2}+\dfrac{a^3+a^2b}{a^2+2ab+b^2}-\dfrac{a^2-2ab}{a+b}$;

c) $\left(\dfrac{b^2}{a^3-ab^2}+\dfrac{1}{a+b}\right):\left(\dfrac{a-b}{a^2+ab}-\dfrac{a}{b^2+ab}\right)$.

1151 Igazoljuk a következő azonosságokat a változók lehetséges értékeit figyelembe véve.

a) $\left(2a-\dfrac{a^2+9b^2}{3b}\right):\left(a+\dfrac{9b^2}{a-6b}\right)+\dfrac{a}{3b}\cdot\left(1-3b-\dfrac{6b}{a}\right)=-a$;

b) $\left(\dfrac{4a^2-1}{a^3-a^2-a+1}:\dfrac{a}{(1-a)^2}\right):\left(\dfrac{4}{a-1}-\dfrac{2}{a^2+a}+\dfrac{8}{1-a^2}\right)=\dfrac{2a+1}{2}$.

1152 Az a és b valós számokra teljesülnek a következő feltételek:

$$a\neq 0,\quad b\neq 0,\quad a\neq b \quad \text{és} \quad \left(a-\frac{ab}{a-b}\right):\left(\frac{ab}{a-b}-b\right)-\frac{a^2}{2b^2}\cdot\left(2-\frac{b}{a}\right)=-6.$$

Számítsuk ki a $\dfrac{3a-2b}{a+b}$ kifejezés értékét.

Oszthatóság, számrendszerek

1153 Milyen számjegyre végződik $n \in \mathbb{N}^+$ szám esetén:

a) $10n + 4$; *b)* $10n + 32$; *c)* $5n + 1$?

1154 Milyen $n \in \mathbb{N}^+$ szám esetén osztható 4-gyel

a) $20 + 3n$; *b)* $8n + 3$; *c)* $5n + 6$?

1155 Milyen számjegyek írhatók x és y helyére, ha

a) $100 \mid \overline{1352xy}$; *b)* $6 \mid \overline{135x2}$; *c)* $24 \mid \overline{14x52y}$; *d)* $45 \mid \overline{135x2y}$?

1156 Bizonyítsuk be, hogy ha a és b olyan természetes számok, amelyekre $7 \mid 2a - 3b$, akkor igaz az is, hogy $7 \mid 18a - 6b$.

1157 Bizonyítsuk be, hogy ha a és b olyan természetes számok, amelyekre $11 \mid a + b$ és $11 \mid 6a - 5b$, akkor $11 \mid 8a - 3b$.

1158 Bizonyítsuk be, hogy:

a) $10 \mid 1956^{2010} + 1982^{1982}$; *b)* $5 \mid 2001^{2007} + 2002^{2006}$;

c) $3 \mid 2001^{2008} + 1848^{2007} - 1704^{2006}$.

1159 Van-e olyan p prímszám, hogy

a) $p + 15$ is prímszám; *b)* $p + 19$ is prímszám?

1160 Határozzuk meg azokat a p, q, r különböző prímszámokat, amelyekre $p + q + r = 30$.

1161 Melyik számnak van több osztója: a 360-nak vagy a 3750-nek?

1162 Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelynek osztója a 6, és hat osztója van?

1163 Számítsuk ki a következőket:

a) (420; 560); *b)* [600; 720]; *c)* (972; 648); *d)* [392; 448];

e) (2205; 14175); *f)* [800; 3400]; *g)* (1584; 9504); *h)* [43875; 27300].

1164 A törtek egyszerűsítése után végezzük el az összeadásokat:

a) $\frac{81}{972} + \frac{32}{640}$; *b)* $\frac{112}{5040} + \frac{297}{13365}$; *c)* $\frac{135}{26460} + \frac{144}{63504}$.

1165 Melyek azok a 20-nál kisebb pozitív egész számok, melyek relatív prímek a 20-szal?

1166 Mennyi a és b legkisebb közös többszöröse, ha a és b relatív prímek?

1167 Határozzuk meg azokat a pozitív egész a számokat, amelyekre $[a; 18] = 90$.

1168 Írjuk át tízes számrendszerbe a következő számokat:

a) 1110011_2; *b)* 210112_3; *c)* 10432_5; *d)* 2013045_6.

1169 Írjuk át az 1956 tízes számrendszerbeli számot

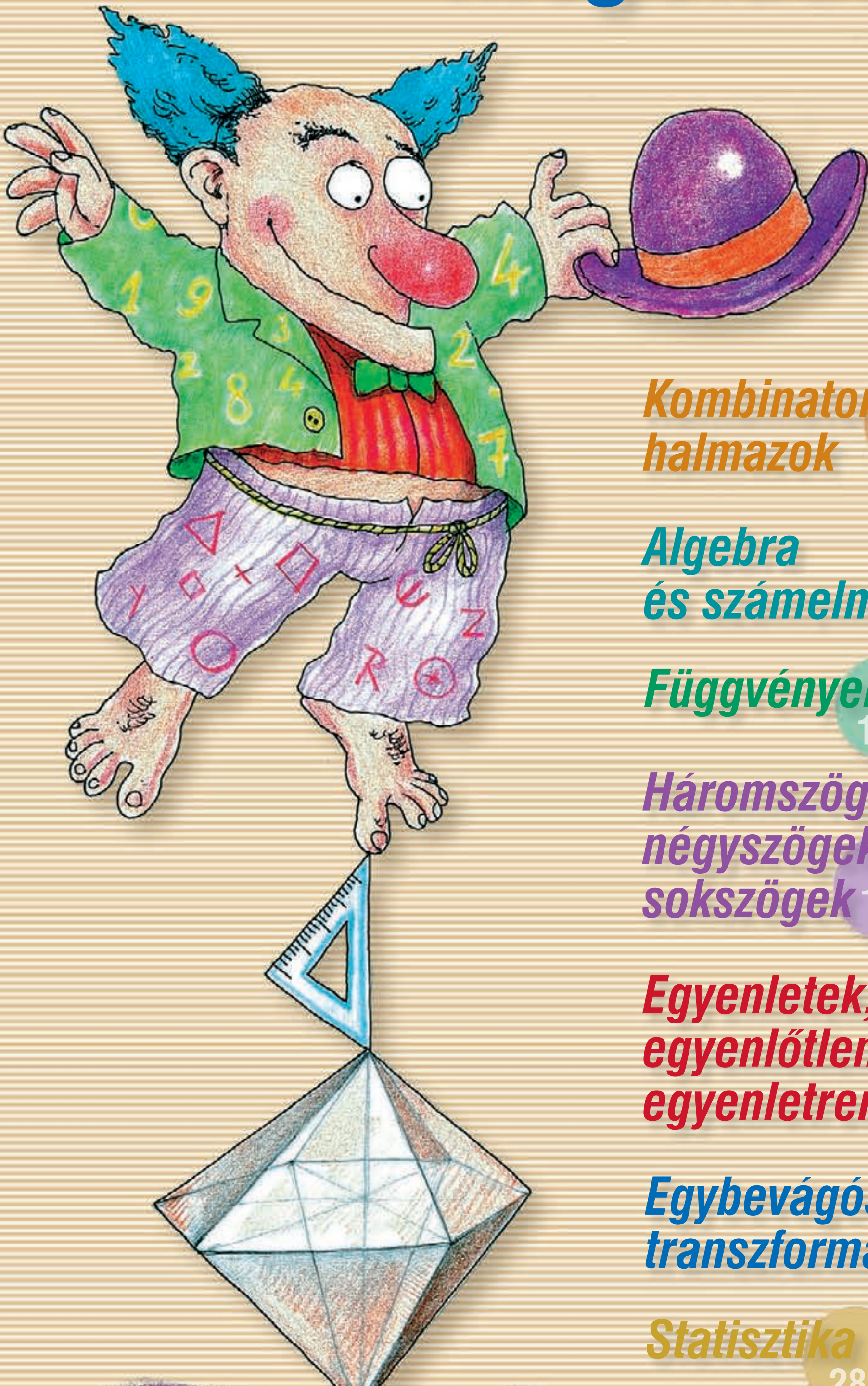
a) 2-es számrendszerbe; *b)* 5-ös számrendszerbe; *c)* 6-os számrendszerbe.

1170 Rendezzük növekvő sorrendbe a következő számokat:

$$1001_2;\quad 102_3;\quad 101_4;\quad 23_5;\quad 31_6;\quad 22_7.$$

1171 Írjuk át 6-os számrendszerbe a 10010110_2 számot.

Megoldások



9.2. ALGEBRA ÉS SZÁMELMÉLET

Betűk használata a matematikában – megoldások

1107 *a)* $5n+4,\ n\in\mathbb{N}$; *b)* $8n+5,\ n\in\mathbb{N}$; *c)* $100n,\ n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$;
d) $100n+17,\ n\in\mathbb{N}$; *e)* $\frac{7}{3n},\ n\in\mathbb{Z},\ n\neq 0$; *f)* $\frac{4n}{4n+3},\ n\in\mathbb{Z}$.

1108 *a)* A 9-cel osztható pozitív egész számokat.
b) Azokat a pozitív egész számokat, melyek 8-cal osztva 5-öt adnak maradékul.
c) A 23-ra végződő legalább háromjegyű pozitív egész számokat.
d) A 2-nél *a*-val kisebb egész számokat (az összes egész számot).
e) A négyzetszámoknál 1-gyel nagyobb természetes számokat.
f) A 3-mal osztva 2 maradékot adó természetes számok 10-ed részét.

1109 *a)* $-4{,}2xy$; $-4xz$; $-2{,}8xyz$; $3{,}6xyz$; $3{,}8xyz$. *b)* $-7ab^2$; $-6ab$; $-6ab$; $-4{,}4a^4b$; $-4{,}2a^2$.

1110 *a)* -3; *b)* 70; *c)* -2; *d)* 8; *e)* $\frac{4}{3}$; *f)* $\frac{3869}{300}$.

1111 *a)* $x\neq 0$; *b)* $x\neq -2$; *c)* $a\neq -\frac{3}{2}$; *d)* $x\neq 0,\ x\neq 1$;
e) $x\neq\frac{4}{5},\ x\neq -\frac{1}{3}$; *f)* $a\neq -\frac{7}{2},\ a\neq\frac{3}{8}$; *g)* $y\neq 3,\ y\neq -3,\ y\neq 2,\ y\neq -2$.

1112 Az oldalak: $2x-2,\ 2x,\ 2x+2$. A kerület: $6x,\ x\in\mathbb{N},\ x>1$.

1113 *a)* Mivel $a=3n+2$, attól függően, hogy n 4-gyel osztva milyen maradékot ad, a 12-es maradék lehet 2, 5, 8 vagy 11.
Mivel $b=4k+3$, attól függően, hogy k 3-mal osztva milyen maradékot ad, a 12-es maradék lehet 3, 7 vagy 11.
b) Az előző esetek alapján, mivel a maradékok összeadódnak, a lehetséges maradékok: 0-tól 11-ig minden egész szám.

Hatványozás, a számok normálalakja – megoldások

1114 *a)* $2^6<2^8$; *b)* $2^{16}>2^{12}$; *c)* $3^6<3^9$; *d)* $2^{15}<2^{16}$;
e) $2^3\cdot 3^3<3^3\cdot 2^4$; *f)* $3^{21}>3^{20}$; *g)* $2^{15}\cdot 5^{15}>2^{12}\cdot 5^{15}$; *h)* $4^{100}\cdot 10^{100}>10^{100}$.

1115 *a)* 2; *b)* 12; *c)* 4; *d)* 9; *e)* 1; *f)* 18.

1116 *a)* a^{41}; *b)* x^{36}; *c)* x^{11}; *d)* b; *e)* x^{26}; *f)* $a^4\cdot b^3$;
g) $a^6\cdot b^3$; *h)* $\frac{c^8}{d^6}$.

1117 *a)* $\frac{1}{81}$; *b)* $-\frac{1}{125}$; *c)* 8; *d)* 49; *e)* $-\frac{27}{125}$; *f)* $\frac{25}{16}$;
g) $\frac{4}{9}$; *h)* $-\frac{2}{5}$; *i)* $\frac{4}{9}$; *j)* 7.

1118 A kitevők:

a) $-2,\quad -4,\quad -5,\quad -8,\quad -10,\quad 30;$ *b)* $-2,\quad -3,\quad -4,\quad -5,\quad -11,\quad 40.$

1119 *a)* $a^3;$ *b)* $x^{10};$ *c)* $\frac{1}{8a};$ *d)* $a^6 \cdot b^8;$ *e)* $\frac{5^{10}}{b^{12}};$ *f)* $c^5;$

g) $a^{30} \cdot b^3;$ *h)* $\frac{d^{21}}{9};$ *i)* $\frac{2^{18} \cdot 3^4}{e^5}.$

1120 *a)* $\frac{1}{216} > \frac{1}{729};$ *b)* $\frac{1}{2^{12}} > \frac{1}{2^{16}};$ *c)* $\frac{1}{10^{10} \cdot 10^{10}} < \frac{1}{2^{10} \cdot 10^{10}};$

d) $\frac{7^3}{4^3} > \frac{7^3}{5^3};$ *e)* $\frac{7^2}{5^3} < \frac{7^3}{5^3};$ *f)* $3^8 = 3^8;$

g) $\frac{8}{7} < 1{,}6.$

1121 *a)* $61 \text{ kg} = 6{,}1 \cdot 10^4 \text{ g} = 6{,}1 \cdot 10^{-2} \text{ t};$ *b)* $3{,}77 \cdot 10^{14} \text{ g} = 3{,}77 \cdot 10^8 \text{ t}.$

1122 *a)* $3{,}33 \cdot 10^{-12}$ s; *b)* $8{,}1 \cdot 10^{11}$ m.

1123 $4^4 = 2^8,\ 8^8 = 2^{24}$, ezért $\left(4^4\right)^3 = 8^8.$

1124 A szorzat átalakítható: $2^{2007} \cdot 125^{345} \cdot 25^{200} = 2^{2007} \cdot 5^{1035} \cdot 5^{400} = 10^{1435} \cdot 2^{572}$. A szorzat tehát 1435 darab 0-ra végződik.

1125 *a)* Igaz. Egész és törtszámok esetén is teljesül.
b) Hamis. A negatív számoknak a páratlan kitevős hatványai negatívak.
c) Igaz. A páros kitevős hatványok pozitívak.
d) Hamis. Lehetnek törtek is.
e) Hamis. Az 1-nek minden hatványa 1.

1126 A tömeg: $\frac{1}{3} \cdot 20 \cdot 10^6 \text{ g} \approx 6{,}67 \cdot 10^3 \text{ kg} = 6{,}67 \text{ t}.$

1127 *a)* $3^5 = 243.$ *b)* $3^4 = 81$-szeresére növekszik.

1128 *a)* $1{,}56 \cdot 10^{17}$ m. *b)* $1{,}04 \cdot 10^6 = 1\,040\,000$-szerese.

1129 Csak a 2 és 3 hatványai jöhetnek szóba.
Ha a kihúzott számok a

$$2^0 = 1,\quad 2^1 = 1,\quad 2^2 = 4,\quad 2^3 = 8,\quad 2^4 = 16,\quad 2^5 = 32,\quad 2^6 = 64$$

közül kerülnek ki, akkor $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ eset lehetséges.

Ha a kihúzott számok a

$$3^0 = 1,\quad 3^1 = 3,\quad 3^2 = 9,\quad 3^3 = 27,\quad 3^4 = 81,$$

akkor 1 eset fordulhat elő.
Tehát összesen $21 + 1 = 22$ esetben lehetnek a kihúzott számok ugyanazon szám egész kitevős hatványai.

Egész kifejezések, nevezetes szorzatok, a szorzattá alakítás módszerei – megoldások

1130 *a)* $-6a^2 + a - 3$; *b)* $b^3 + 3b^2 - 3$; *c)* $-3cd^2 - 3c^2 + 5d + 3$;
d) $a^2 - 6a + 6$; *e)* 1; *f)* $a^2 - 8a - 23$;
g) $-3x^3 + 8x^2 - 14x + 4$; *h)* $8x + 8$; *i)* $-6a^2 - 7a + 7$;
j) $16x^2 - 21x - 4$; *k)* $x + 5$; *l)* $12x^2 - 30x - 26$.

1131 *a)* $-3b + 3 = 1$; *b)* $-a - 3 = -1$; *c)* $-2a + 1 = 5$;
d) $-3b - 15a - 6 = 22$; *e)* $9b + 14a = -22$; *f)* $a + 6b = 2$.

1132 *a)* $a^2 + 14a + 49$; *b)* $64 - 16b + b^2$; *c)* $49 - 14b + b^2$;
d) $9y^2 + 12xy + 4x^2$; *e)* $16x^2 - 24xy + 9y^2$; *f)* $100a^2 - 60ab + 9b^2$;
g) $x^4 + 6x^2z + 9z^2$; *h)* $4x^6 - 12x^3y^2 + 9y^4$; *i)* $64a^6 - 80a^3b^2 + 25b^4$;
j) $\frac{4}{9}\cdot x^2 + \frac{1}{3}\cdot xy + \frac{1}{16}y^2$; *k)* $\frac{25}{36}\cdot x^2 - \frac{35}{9}\cdot xy + \frac{49}{9}\cdot y^2$;
l) $z^2 + 4x^2 + y^2 + 4zx + 2zy + 4xy$;
m) $9x^2 + 4y^2 + z^2 + 12xy - 6xz - 4yz$;
n) $16x^2 + \frac{4}{25}\cdot y^2 + \frac{1}{49}\cdot z^2 - \frac{16}{5}\cdot xy - \frac{8}{7}\cdot xz + \frac{4}{35}\cdot yz$.

1133 *a)* $(a + 4)^2 = (-a - 4)^2$; *b)* $(b - 5)^2 = (5 - b)^2$;
c) $(c + 7)^2 = (-c - 7)^2$; *d)* $(x - 20)^2 = (20 - x)^2$;
e) $\left(d^2 - 10\right)^2 = \left(10 - d^2\right)^2$; *f)* $\left(x^4 + 5\right)^2 = \left(-x^4 - 5\right)^2$;
g) $\left(x^3 + 3y^5\right)^2 = \left(-x^3 - 3y^5\right)^2$; *h)* $\left(0{,}5x - 6y^3\right)^2 = \left(6y^3 - 0{,}5x\right)^2$;
i) $\left(\frac{2}{3}\cdot x^2 + \frac{1}{4}y\right)^2 = \left(-\frac{2}{3}\cdot x^2 - \frac{1}{4}\cdot y\right)^2$.

1134 *a)* $a^3 + 9a^2 + 27a + 27$; *b)* $8b^3 - 12b^2 + 6b - 1$;
c) $27c^6 + 108c^4 + 144c^2 + 64$; *d)* $64d^9 - 96d^6x^2 + 48d^3x^4 - 8x^6$;
e) $0{,}125x^6 + 1{,}5x^4y + 6x^2y^2 + 8y^3$; *f)* $\frac{8}{27}\cdot x^3 - \frac{16}{15}\cdot x^2y + \frac{32}{25}\cdot xy^2 - \frac{64}{125}\cdot y^3$.

1135 *a)* $9a^2 - 25$; *b)* $64x^2 - 49$; *c)* $16b^2 - 4x^2$; *d)* $36a^2 - 25b^2$;
e) $25c^2 - 9y^2$; *f)* $25a^6 - 1$; *g)* $9d^4 - 64$; *h)* $4y^2 - 81x^4$;
i) $49e^{10} - 100x^6$; *j)* $\frac{4}{49}\cdot x^{14} - \frac{1}{9}\cdot y^6$.

1136 *a)* $6a^2 - 2a + 14$; *b)* $8x^2 - 26x + 36$; *c)* $12x^2 + 64x + 9$;
d) $2x^2 + 50$; *e)* $-7b^2 - 32b + 48$; *f)* $-9x^2 + 24x - 31$;
g) $20c + 78$; *h)* $x^3 - 8y^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 24x^2 + 12y^2 - 12xy$;
i) $-2x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 23$; *j)* $\frac{19}{4}\cdot y^2 - x^2 - 2xy$.

1137 *a)* $a^3 - 1$; *b)* $b^3 + 125$; *c)* $27x^3 + 64$.

1138 *a)* $(x-1)^2 - 4$; *b)* $(a+2)^2 + 2$; *c)* $(a+3)^2 - 8$;
d) $(x-4)^2 + 4$; *e)* $(a-5)^2 - 23$; *f)* $(x+6)^2 + 14$;
g) $(x+7)^2 - 18$; *h)* $2 \cdot (x-4)^2 - 6$; *i)* $-(x+3)^3 + 12$;
j) $-(x-6)^2 + 37$; *k)* $3 \cdot (x+2)^2 - 10$; *l)* $-5 \cdot (x+2)^2 + 13$.

1139 *a)* $a \cdot (3a^2 - 2a + 1)$; *b)* $2x \cdot (3x^2 - 5x + 1)$; *c)* $4b \cdot (b^3 + 2b^2 + 7b - 1)$;
d) $5x \cdot (7x^2 + 3x + 4)$; *e)* $3a^2 \cdot (2a^2 - 3a + 1)$; *f)* $4x^3 \cdot (x^2 - 6x + 3)$;
g) $5a^2b \cdot (ab - 3b^2 + 2)$; *h)* $17ab^4 \cdot (a^2b + ab^2 - 2)$; *i)* $8a^2b^3 \cdot (2a^2 + 3b - 5a^2b)$.

1140 *a)* $(a+3) \cdot (b-2)$; *b)* $(2a+b) \cdot (x+1)$;
c) $(a+5) \cdot (2x+y)$; *d)* $(a-2x) \cdot (b+4)$;
e) $(x+2) \cdot (3a-b)$; *f)* $(4x-1) \cdot (a-2b) = (2b-a) \cdot (1-4x)$;
g) $(3a+4b) \cdot (2x+5)$; *h)* $(a-4x^2) \cdot (1-5b) = (4x^2-a) \cdot (5b-1)$;
i) $(3a^2 - 4b^3) \cdot (3 - 2x^2) = (4b^3 - 3a^2) \cdot (2x^2 - 3)$.

1141 *a)* $(4x-5) \cdot (4x+5)$; *b)* $(7a+10b) \cdot (7a-10b)$;
c) $(8b+3x) \cdot (8b-3x)$; *d)* $(6x^2 - 11y^3) \cdot (6x^2 + 11y^3)$;
e) $(x-10)^2 = (10-x)^2$; *f)* $(6a-7)^2 = (7-6a)^2$;
g) $\left(\frac{2}{5} \cdot x + 5\right)^2$; *h)* $(4x^2-1) \cdot (4x^2+1) = (2x-1) \cdot (2x+1) \cdot (4x^2+1)$;
i) $(4+9x^2) \cdot (4-9x^2) = (4+9x^2) \cdot (2+3x) \cdot (2-3x)$;
j) $\left(2a^2 + 7b^3\right)^2$; *k)* $6 \cdot (x+1)^2$;
l) $4x \cdot (x-3)^2$; *m)* $3x^2 \cdot (x+2)^2$;
n) $5x^2 \cdot (x^2-4)^2$;
o) $(1+x^6) \cdot (1-x^6) = (1+x^6) \cdot (1+x^3) \cdot (1-x^3) = (1+x^6) \cdot (1+x^3) \cdot (1-x) \cdot (1+x+x^2) =$
$= (1+x^2) \cdot (1-x^2+x^4) \cdot (1+x) \cdot (1-x+x^2) \cdot (1-x) \cdot (1+x+x^2)$;
p) $(x+5) \cdot (x+3)$; *q)* $(x-4) \cdot (x+3)$;
r) $(4x^2+3) \cdot (x^2-4) = (4x^2+3) \cdot (x-2) \cdot (x+2)$;
s) $(2x+1)^3$; *t)* $(3a-b)^3$;
u) $(2x+3y)^3$; *v)* $(a-3) \cdot (a^2+3a+9)$;
w) $(x+4) \cdot (x^2-4x+16)$; *x)* $(3a+5b) \cdot (9a^2 - 15ab + 25b^2)$.

1142 *a)* $(10\,000 - 2) \cdot (10\,000 + 2) = 100\,000\,000 - 4 = 99\,999\,996$;

b) $\dfrac{(526+74) \cdot (526-74)}{(726+274) \cdot (726-274)} = \dfrac{600 \cdot 452}{1000 \cdot 452} = 0{,}6$;

c) Legyen $a = 54\,320$:

$$\frac{54321 \cdot 54325 - 54323 \cdot 54320}{54323 \cdot 54322 - 54321^2} = \frac{(a+1) \cdot (a+5) - (a+3) \cdot a}{(a+3) \cdot (a+2) - (a+1)^2} = \frac{3a+5}{3a+5} = 1.$$

1143 Az $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ kifejezésből

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 23^2 - 2 \cdot (-7) = 543.$$

1144 Egy polinomban az együtthatók összegét megkapjuk, ha a változó helyére 1-et helyettesítünk.

Az $\left(x^2-3x+1\right)^{2007}$ kifejezés $x=1$ esetén:

$$(-1)^{2007}=-1.$$

Tehát a keresett polinomban az együtthatók összege –1.

1145 Legyenek a téglalap oldalai a és b. Tudjuk, hogy

$$2\cdot(a+b)=74,$$
$$a+b=37,$$

másrészt

$$2\cdot a^2+2\cdot b^2=1642,$$
$$a^2+b^2=821.$$

Az $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ kifejezésből

$$2ab=(a+b)^2-(a^2+b^2)=37^2-821=548.$$

Tehát a téglalap területe 274 cm^2.

1146 Végezzük el a következő átalakításokat:

$$a^3-b^3=(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)=$$
$$=(a-b)\cdot\left[(a-b)^2+2ab+ab\right]=(a-b)\cdot\left[(a-b)^2+3ab\right].$$

Behelyettesítve:

$$a^3-b^3=2\cdot(2^2+3\cdot 7)=50.$$

Műveletek algebrai törtekkel – megoldások

1147 *a)* $\dfrac{9a^3}{4b}$; *b)* $\dfrac{x}{2}$; *c)* $-\dfrac{4}{3a}$; *d)* $2a$;

e) $-\dfrac{4}{5}\cdot a^2$; *f)* $2y$; *g)* $\dfrac{2x+3}{x+5}$; *h)* $\dfrac{1-2x}{1+2x}$;

i) $\dfrac{3x+5}{4x}$; *j)* $\dfrac{2y+1}{4x+3}$; *k)* $\dfrac{x-4}{x+6}$; *l)* $\dfrac{2x-4}{x+2}$.

1148 *a)* $\dfrac{ab}{10xy}$; *b)* $\dfrac{3by^2}{8ax}$; *c)* $\dfrac{y}{x}$; *d)* a^2b;

e) $\dfrac{b-2}{a\cdot(b-3)}$; *f)* $\dfrac{3b+1}{b}$; *g)* $\dfrac{1}{x+4}$; *h)* $\dfrac{a-1}{a}$.

1149 *a)* $\dfrac{4x^2+15}{10x}$; *b)* $\dfrac{3-18y}{4y^2}$; *c)* $\dfrac{a+7}{a\cdot(a+1)}$; *d)* $\dfrac{1}{3}$;

e) $\dfrac{21-12x}{10\cdot(2x-1)}$; *f)* $\dfrac{5a-14}{12\cdot(3a+5)}$; *g)* $-\dfrac{1}{6}$; *h)* $\dfrac{8}{(x+2)\cdot(x-2)}$;

i) 1; *j)* $\dfrac{y^2-10y-27}{3\cdot(y+5)^2}$; *k)* $\dfrac{4x^2+22x-5}{(2x-5)\cdot(2x+5)^2}$; *l)* $\dfrac{y^2-4y-7}{(y+1)^3}$.

1150 *a)* A tört értelmezve van, ha $4ab^2 + 4abc \neq 0$, azaz $4ab \cdot (b + c) \neq 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $b + c \neq 0$.
A számlálóban két négyzet különbsége áll, tehát szorzattá alakítható:

$$\frac{(a^2 + b^2 - c^2 + a^2 - b^2 + c^2) \cdot (a^2 + b^2 - c^2 - a^2 + b^2 - c^2)}{4ab \cdot (b + c)} =$$

$$= \frac{2a^2 \cdot 2 \cdot (b^2 - c^2)}{4ab \cdot (b + c)} = \frac{a \cdot (b - c)}{b}.$$

b) A törtek nevezői nem lehetnek egyenlők 0-val: $a^2 - b^2 \neq 0$, illetve $(a + b)^2 \neq 0$, azaz $a + b \neq 0$.
Mindhárom feltétel teljesül, ha $|a| \neq |b|$.
A számlálókat és a nevezőket is alakítsuk szorzattá, majd egyszerűsítsünk:

$$\frac{ab \cdot (a - b)}{(a - b) \cdot (a + b)} + \frac{a^2 \cdot (a + b)}{(a + b)^2} - \frac{a^2 - 2ab}{a + b} = \frac{ab}{a + b} + \frac{a^2}{a + b} - \frac{a^2 - 2ab}{a + b} = \frac{3ab}{a + b}.$$

c) A törtek nevezői nem lehetnek egyenlők 0-val:

$$\begin{array}{rrrr} a^3 - ab^2 \neq 0, & & & \\ a \cdot (a^2 - b^2) \neq 0, & & a^2 + ab \neq 0, & b^2 + ab \neq 0, \\ a \cdot (a - b) \cdot (a + b) \neq 0; & a + b \neq 0; & a \cdot (a + b) \neq 0; & b \cdot (a + b) \neq 0. \end{array}$$

Minden feltétel teljesül, ha $a \neq 0$, $b \neq 0$, $|a| \neq |b|$.
A zárójeleken belül hozzunk közös nevezőre:

$$\left(\frac{b^2}{a \cdot (a - b) \cdot (a + b)} + \frac{a \cdot (a - b)}{a \cdot (a - b) \cdot (a + b)}\right) : \left(\frac{(a - b) \cdot b}{ab \cdot (a + b)} - \frac{a^2}{ab \cdot (a + b)}\right) =$$

$$= \frac{b^2 + a^2 - ab}{a \cdot (a - b) \cdot (a + b)} \cdot \frac{ab \cdot (a + b)}{ab - a^2 - b^2} = \frac{-1}{a - b} \cdot b = \frac{b}{b - a}.$$

1151 *a)* Alakítsuk át az egyenlőség bal oldalán álló kifejezéseket. Közös nevezőre hozás után egyszerűsítsünk, majd újra hozzunk közös nevezőre:

$$\frac{6ab - a^2 - 9b^2}{3b} \cdot \frac{a - 6b}{a^2 - 6ab + 9b^2} + \frac{a}{3b} \cdot \frac{a - 3ab - 6b}{a} =$$

$$= \frac{-1}{3b} \cdot (a - 6b) + \frac{a - 3ab - 6b}{3b} = \frac{-a + 6b + a - 3ab - 6b}{3b} = \frac{-3ab}{3b} = -a.$$

b) A módszer ugyanaz, az első nevező szorzattá alakítása:

$$a^3 - a^2 - a + 1 = a^2 \cdot (a - 1) - (a - 1) = (a - 1) \cdot (a^2 - 1) = (a - 1)^2 \cdot (a + 1).$$

Ezt beírva egyszerűsíthetünk az első zárójelben:

$$\frac{4a^2 - 1}{(a - 1)^2 \cdot (a + 1)} \cdot \frac{(1 - a)^2}{a} = \frac{4a^2 - 1}{a \cdot (a + 1)} = \frac{(2a - 1) \cdot (2a + 1)}{a \cdot (a + 1)}. \qquad (1)$$

A második zárójelben legyen a közös nevező $a \cdot (a - 1) \cdot (a + 1)$, ekkor

$$\frac{4a \cdot (a + 1) - 2 \cdot (a - 1) - 8a}{a \cdot (a - 1) \cdot (a + 1)} = \frac{4a^2 - 6a + 2}{a \cdot (a - 1) \cdot (a + 1)}. \qquad (2)$$

A számlálót alakítsuk szorzattá:

$$4a^2-6a+2=4a^2-4a-2a+2=4a\cdot(a-1)-2\cdot(a-1)=$$
$$=(a-1)\cdot(4a-2)=2\cdot(a-1)\cdot(2a-1).$$

Ezt (2)-be beírva egyszerűsíthetünk:

$$\frac{2\cdot(a-1)\cdot(2a-1)}{a\cdot(a-1)\cdot(a+1)}=\frac{2\cdot(2a-1)}{a\cdot(a+1)}.$$

(1) és (3) alapján az eredeti kifejezés:

$$\frac{(2a-1)\cdot(2a+1)}{a\cdot(a+1)}\cdot\frac{a\cdot(a+1)}{2\cdot(2a-1)}=\frac{2a+1}{2}.$$

1152 Alakítsuk át a bal oldalt:

$$\left(a-\frac{ab}{a-b}\right):\left(\frac{ab}{a-b}-b\right)-\frac{a^2}{2b^2}\cdot\left(2-\frac{b}{a}\right)=$$
$$=\frac{a^2-ab-ab}{a-b}\cdot\frac{a-b}{ab-ab+b^2}-\frac{a^2}{2b^2}\cdot\frac{2a-b}{a}.$$

Egyszerűsítések után:

$$\frac{a^2-2ab}{b^2}-\frac{2a^2-ab}{2b^2}=\frac{-3ab}{2b^2}=-\frac{3a}{2b}.$$

A feltétel szerint: $-\frac{3a}{2b}=-6$, amiből $a=4b$ következik.
Behelyettesítve a kiszámítandó törtbe:

$$\frac{3a-2b}{a+b}=\frac{10b}{5b}=2.$$

Oszthatóság, számrendszerek – megoldások

1153 *a)* 4-re végződik. *b)* 2-re végződik. *c)* 1-re vagy 6-ra végződik.

1154 *a)* Ha n osztható 4-gyel. *b)* Nincs ilyen n.
c) Ha $n=4k+2$ alakú természetes szám.

1155 *a)* $x=y=0$. *b)* $x=1;4;7$. *c)* Ha $y=0$, $x=0;3;6;9$. Ha $y=8$, $x=1;4;7$.
d) Ha $y=0$, $x=7$. Ha $y=5$, $x=2$.

1156 $18a-6b=14a+2\cdot(2a-3b)$.

1157 $8a-3b=2\cdot(a+b)+(6a-5b)$.

1158 *a)* Az utolsó jegyek összege: $6+4=10$. *b)* A hatványok összege 5-re végződik.
c) Mindegyik hatványalap osztható 3-mal.

1159 *a)* $p=2$.
b) Csak páros lehetne p, de a 21 nem prím, tehát nincs ilyen prímszám.

1160 $p = 2,\ q = 5,\ r = 23$; vagy $p = 2,\ q = 11,\ r = 17$.

1161 $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$; $3750 = 2 \cdot 3 \cdot 5^4$. A 360-nak 24, a 3750-nek 20 osztója van.

1162 12.

1163 *a)* $2^2 \cdot 5 \cdot 7 = 140$; *b)* $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 3600$; *c)* $2^2 \cdot 3^4 = 324$;
d) $2^6 \cdot 7^2 = 3136$; *e)* $3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 315$; *f)* $2^5 \cdot 5^2 \cdot 17 = 13\,600$;
g) $2^4 \cdot 3^2 \cdot 11 = 1584$; *h)* $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13 = 1\,228\,500$.

1164 *a)* $\frac{2}{15}$. *b)* $\frac{2}{45}$. *c)* $\frac{13}{1764}$.

1165 1; 3; 7; 9; 11; 13; 17; 19.

1166 $[a; b] = a \cdot b$.

1167 $a = 5$; 10; 15; 45; 30; 90.

1168 *a)* 115; *b)* 581; *c)* 742; *d)* 95 285.

1169 *a)* 11110100100_2; *b)* 30311_5; *c)* 13020_6.

1170 $1001_2 = 9 < 102_3 = 11 < 23_5 = 13 < 22_7 = 16 < 101_4 = 17 < 31_6 = 19$.

1171 $10010110_2 = 410_6$.

1172 Az összeadás helyesen: $3124_5 + 10232_5 = 13411_5$.

1173 Mivel $21\,600 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2$, és a négyzetszámok prímtényezős felbontásában minden kitevő páros, ezért a megfelelő osztó: $2 \cdot 3 = 6$.
Így a hányados valóban négyzetszám:
$$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = (2^2 \cdot 3 \cdot 5)^2 = 60^2.$$

1174 A 40-re végződő szám osztható 10-zel. Ha egy szám négyzete lenne, az a szám is osztható lenne 10-zel. De akkor a négyzete 100-zal is osztható lenne, ami nem teljesül.

1175 Legyen a lépcsők száma n. Ez a szám a 2, 3, 4, 5, 6 többszöröseinél 1-gyel kisebb. A fenti számok legkisebb közös többszöröse 60, tehát $60 \mid n + 1$, azaz $n + 1 = 60k$, ahol $k \in \mathbb{N}^+$, másrészt $7 \mid n$. A legkisebb ilyen tulajdonságú számot keressük.
Legyen $k = 1$, ekkor $n = 59$, de a 7 nem osztója az 59-nek.
Ha $k = 2$, akkor $n = 119 = 17 \cdot 7$.
Tehát a legkisebb megfelelő szám a 119.

1176 Amikor Tibor n éves, édesanyja $28 + n$ éves. $n \mid 28 + n$, ezért $n \mid 28$. Tehát Tibor életkora akkor lesz osztója az édesanyjáénak, ha ő 1, 2, 4, 7, 14, 28 éves lesz.

1177 *a)* Hamis. Ha egyik szám osztója a másiknak, akkor a legnagyobb közös osztó a kisebb szám.
b) Igaz. A legkisebb közös többszörös legalább akkora, mint a nagyobb szám.
c) Hamis. A legnagyobb közös osztó csak a közös osztóknak többszöröse.
d) Igaz. Mivel a legnagyobb közös osztó mindkét számnak osztója, ezért a többszöröseiknek is.
e) Igaz. Ha a két számnak nincs közös prímtényezője, akkor a legkisebb közös többszörös a szorzatuk.
f) Hamis. Például $11 + 2 = 13$.