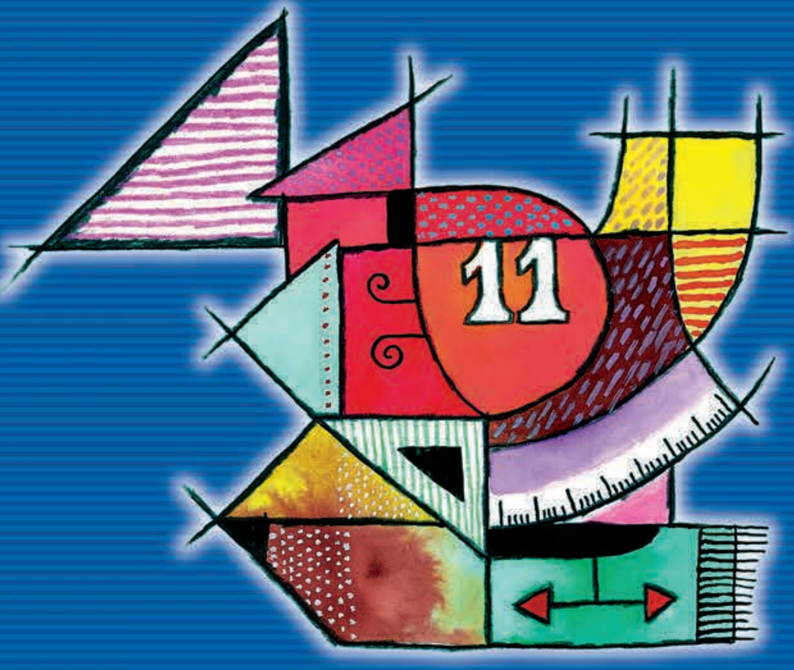
Kosztolányi József
Kovács István
Pintér Klára
Urbán János
Vincze István

sokszínű Matematika 11

DIGITÁLIS VÁLTOZATBAN IS ELÉRHETŐ
Aktiváló kóddal



MOZAIK
www.mozaik.info.hu

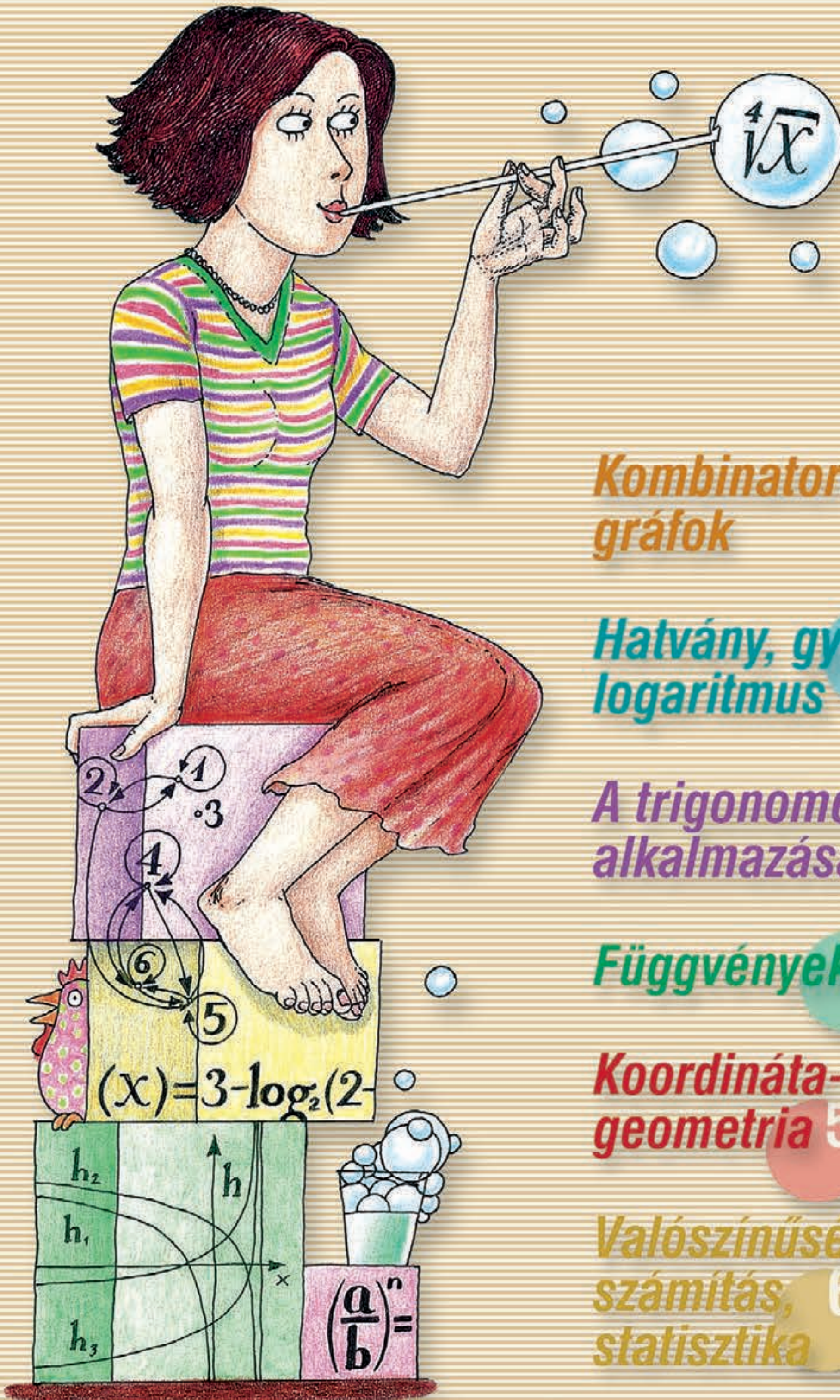
Kosztolányi József
Kovács István
Pintér Klára
Urbán János
Vincze István

Matematika

tankönyv 11

Tizenhetedik, változatlan kiadás

Mozaik Kiadó – Szeged, 2019



Kombinatorika, gráfok 1

Hatvány, gyök logaritmus 2

A trigonometria alkalmazásai 3

Függvények 4

Koordináta-geometria 5

Valószínűség-számítás, statisztika 6

Kombinatorika, gráfok

1. Fibonacci-számok 10
2. Permutációk, variációk 13
3. Ismétlés nélküli kombinációk, Pascal-háromszög 20
4. Binomiális együtthatók, ismétléses kombináció 28
5. Vegyes összeszámlálási feladatok (kiegészítő anyag) 34
6. GRÁFOK – pontok, élek, fokszám 38
7. GRÁFOK – út, vonal, séta, kör, Euler-vonal (kiegészítő anyag) 48
8. Fagráfok (kiegészítő anyag) 57
9. A kombinatorika gyakorlati alkalmazásai 63

Hatvány, gyök, logaritmus

1. Hatványozás és gyökvonás (emlékeztető) 66
2. Hatványfüggvények és gyökfüggvények 71
3. Törtkitevőjű hatvány 74
4. Irracionális kitevőjű hatvány, exponenciális függvény 80
5. Exponenciális egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek 85
6. A logaritmus fogalma 92
7. A logaritmusfüggvény 98
8. A logaritmus azonosságai 102
9. Logaritmikus egyenletek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségek 107
10. Gyakorlati alkalmazások 115

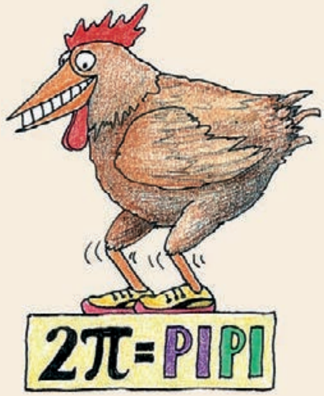
A trigonometria alkalmazásai

1. Vektorműveletek rendszerezése, alkalmazások (emlékeztető) 120
2. A skaláris szorzat 125
3. Skaláris szorzat a koordináta-rendszerben 130
4. A szinusztétel 134
5. A koszinusztétel 139
6. Trigonometrikus összefüggések alkalmazásai 143
7. Összegzési képletek 147
8. Az összegzési képletek alkalmazásai 150

9. Trigonometrikus egyenletek, egyenlőtlenségek 156
10. A trigonometria alkalmazása a helymeghatározásban 163

Függvények

1. Az exponenciális és logaritmusfüggvény 166
2. Egyenletek és függvények 170
3. Trigonometrikus függvények 172
4. Trigonometrikus egyenletek, egyenlőtlenségek (kiegészítő anyag) 176
5. Vegyes feladatok (kiegészítő anyag) 181
6. Inverz függvények (kiegészítő anyag) 186
7. A függvények egy gyakorlati alkalmazása 189



Koordináta-geometria

1. Vektorok a koordináta-rendszerben. Műveletek koordinátáikkal adott vektorokkal (emlékeztető) 192
2. Két pont távolsága. Két vektor hajlásszöge 195
3. Szakasz osztópontjának koordinátái. A háromszög súlypontjának koordinátái 198
4. Az egyenest meghatározó adatok a koordináta-rendszerben ... 204
5. Az egyenes egyenlete I. 212
6. Az egyenes egyenlete II. 215
7. Két egyenes metszéspontja, távolsága, hajlásszöge 219
8. A kör egyenlete 225
9. A kör és az egyenes kölcsönös helyzete; két kör közös pontjai 233
10. A parabola egyenlete 244
11. A parabola és a másodfokú függvény (kiegészítő anyag) 250
12. Kúpszeletek és egyenleteik a koordináta-rendszerben (kiegészítő anyag) 253
13. A koordináta-geometria két gyakorlati alkalmazása 258

Valószínűség-számítás, statisztika

1. Klasszikus valószínűségi modell 264
2. Visszatevéses mintavétel 273
3. Mintavétel visszatevés nélkül (kiegészítő anyag) 280
4. Valószínűségi játékok gráfokon (kiegészítő anyag) 286
5. Valóság és statisztika 293

Útmutató a tankönyv használatához

A könyv jelrendszere és kiemelései segítenek a tananyag elsajátításában.

- A kidolgozott példák gondolatmenete mintát ad a módszerek, eljárások megértéséhez és a további feladatok megoldásához.
- A legfontosabb definíciókat és tételeket színes kiemelés jelzi.
- A tananyag apró betűvel szedett részei és a bordó színnel megjelölt kidolgozott mintapéldák a mélyebb megértést segítik. Ezek az ismeretek szükségesek az emelt szintű érettségihez.
- A margón ábrák, az adott lecke főbb vázlatpontjai, ismétlő, magyarázó részek, valamint matematikatörténeti érdekességek találhatók.

A mintapéldák és a kitűzött feladatok nehézségét három különböző színnel jelöltük:

Sárga: elemi szintű gyakorló feladatok, amelyek megoldása, begyakorlása nélkülözhetetlen a továbbhaladáshoz.
Kék: a középszintű érettséginek megfelelő színvonalú feladatok.
Bordó: az emelt szintű érettségire való felkészülést segítő problémák, feladatok.

Ezek a színkódok megfelelnek a Mozaik Kiadó Sokszínű matematika feladatgyűjteményeiben alkalmazott jelöléseknek. A feladatgyűjtemény-sorozat több mint 3000, a gyakorláshoz, az órai munkához és az érettségi felkészüléshez is alkalmas feladatot tartalmaz.

◆ ◆ ◆

A matematika, a ráció, a logikus gondolkodás világunk megismerésének egyik talán leghatékonyabb eszköze, amely néha megmagyarázhatatlan jelenségekkel társul. Elválaszthatatlan a gondolkodó embertől, és teljessé teszi mindennapi tevékenységeit.

Néhány gondolat azoktól, akik mindezt megtapasztalták:

„Mindenkit fel kell ruházni azzal a készséggel, hogy a jelenségekben, az esetlegességet mellőzve, a lényeges jegyeket ragadja meg. Erre minden embernek szüksége van.” (Császár Ákos, matematikus)

„Természetesen a matematika bizonyos részei sokkal jobban felhasználhatók a strukturált gondolkodás fejlesztésére, mint mások. Az ilyesfajta gondolkodásnak egyre nagyobb szerepe van abban, hogy képesek legyünk megbirkózni a modern élet komplexitásával.” (Dienes Zoltán, matematikus)

„De a matematika nem valami távoli érthetetlenség, amelyhez külön ész kéne, ugyanavval az (egy szál) eszünkkel közelítünk a regényhez, mint őhozzá. A matematika is a létezésünkről, annak gazdagságáról ad hírt. Mindig ugyanarról beszélünk, hol Flaubert, hol Bolyai, hol Pilinszky, hol Gödel hangját halljuk. Ha fülelünk.” (Esterházy Péter, író)

„És annak is, aki tanul, akár tudósnak, akár gyakorlati pályára készül, nem szabad megelégednie a hallott vagy olvasott anyag egyszerű beraktározásával, hanem föl kell tennie a kritikus szemüvegét, elemeznie kell, boncolnia, összehasonlítania, mert másképp az a megemészthetetlen tudás, amit magába szedett, csak teher lesz számára.” (Riesz Frigyes, matematikus)

Eredményes munkát és tanulást kívánnak a Szerzők.

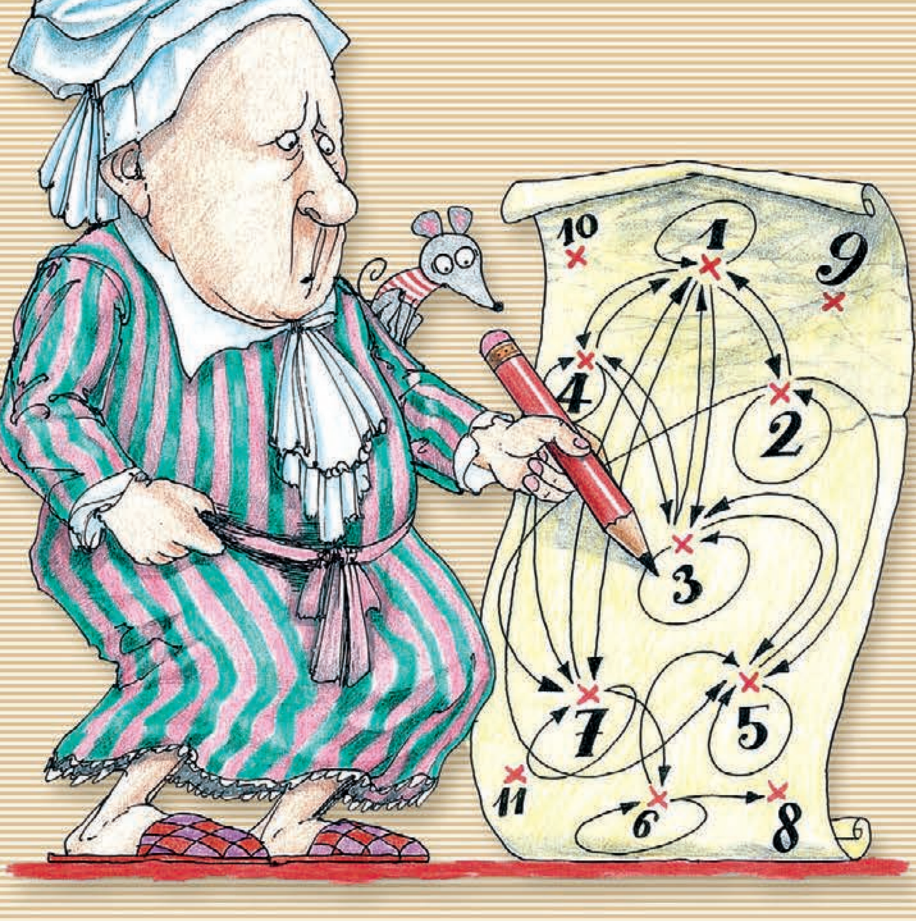
Kombinatorika, gráfok

A gráfelmélet történetét Euler (1707–1783) 1736-ban megjelent dolgozatától számítják, amely a „königsbergi hidak” néven híressé vált problémával foglalkozott.

Egyre több olyan geometriai problémát kezdtek vizsgálni, amely az alakzatoknak a mérettől és alaktól független tulajdonságait kutatja, ezeket kezdetben a „helyzet geometriájának” (latinul „geometria situs”) nevezték.

Az első tudományos színvonalú gráfelmélet könyvet Kőnig Dénes (1884–1944) magyar matematikus, a budapesti Műegyetem akkori magántanára írta, 1936-ban jelent meg „Theorieder endlichen und unendlichen Graphen” (A véges és végtelen gráfok elmélete) címmel.

A magyar matematikusok azóta is élen járnak a gráfelmélet művelésében.



4. Binomiális együtthatók, ismétléses kombináció

Algebrában tanultuk kéttagú összegek négyzetét, köbét. Most vizsgáljuk ezt általánosabban.

1. példa

Figyeljük meg a kéttagú összeg hatványaiban a tagok együtthatóit. Mit állapíthatunk meg?

Megoldás

Megfigyelhetjük, hogy a kéttagú összeg hatványaiban a tagok együtthatói a Pascal-háromszög megfelelő soraiban levő számok.

kéttagú összeg hatványai	Pascal-háromszög
$(a+b)^0 = 1$	1
$(a+b)^1 = 1\cdot a + 1\cdot b$	1 1
$(a+b)^2 = 1\cdot a^2 + 2\cdot ab + 1\cdot b^2$	1 2 1
$(a+b)^3 = 1\cdot a^3 + 3\cdot a^2b + 3\cdot ab^2 + 1\cdot b^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4 = 1\cdot a^4 + 4\cdot a^3b + 6\cdot a^2b^2 + 4\cdot ab^3 + 1\cdot b^4$	1 4 6 4 1

Az $(a + b)^4 = (a + b)\cdot(a + b)\cdot(a + b)\cdot(a + b)$ szorzás elvégzése során úgy kapunk egy tagot, hogy mindegyik tényezőből vagy a-t vagy b-t kiválasztjuk, és összeszorozzuk őket. Így minden tagban a és b kitevőjének összege 4, és a választási lehetőségek száma adja a megfelelő együtthatót.

- a^4-t úgy kapunk, ha 4 tényezőből az a-t választjuk és 0 tényezőből választjuk a b-t, és ezeket szorozzuk össze. Ezt $\binom{4}{0} = 1$-féleképpen tehetjük meg.
- a^3b-t úgy kapunk, hogy 3 tényezőből az a-t választjuk és 1 tényezőből a b-t, ezt $\binom{4}{1} = 4$-féleképpen tehetjük meg.
- a^2b^2-t úgy kapunk, hogy 2 tényezőből a-t választjuk és 2 tényezőből a b-t, ezt $\binom{4}{2} = 6$-féleképpen tehetjük meg.
- ab^3-t úgy kapunk, hogy 1 tényezőből a-t választjuk és 3 tényezőből a b-t, ezt $\binom{4}{3} = 4$-féleképpen tehetjük meg.
- b^4-t úgy kapunk, hogy 0 tényezőből az a-t választjuk és 4 tényezőből a b-t, ezt $\binom{4}{4} = 1$-féleképpen tehetjük meg.

Ez alapján

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0} \cdot a^4 + \binom{4}{1} \cdot a^3 b + \binom{4}{2} \cdot a^2 b^2 + \binom{4}{3} \cdot ab^3 + \binom{4}{4} \cdot b^4.$$

Általánosan is igaz a következő:

binomiális tétel

BINOMIÁLIS TÉTEL:

$$\mathbf{(a+b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} b + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} b^2 + \ldots +}$$
$$\mathbf{+ \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} b^k + \ldots + \binom{n}{n-1} \cdot ab^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot b^n.}$$

Bizonyítás

Az $(a + b)^n$-t írjuk fel n tényezős szorzatként:

$$(a+b)^n = \overset{1.}{(a+b)} \cdot \overset{2.}{(a+b)} \cdot \ \ldots \ \cdot \overset{n-1.}{(a+b)} \cdot \overset{n.}{(a+b)}.$$

A szorzás elvégzése során úgy kapunk egy tagot, hogy mindegyik tényezőből vagy a-t vagy b-t kiválasztjuk, és összeszorozzuk őket. Így a és b kitevőjének összege minden tagban n.

$a^{n-k}b^k$-t úgy kapunk, ha $n-k$ tényezőből az a-t választjuk, k tényezőből választjuk a b-t, és ezeket szorozzuk össze. Ezt $\binom{n}{k}$-féleképpen tehetjük meg, ezért ez lesz az $a^{n-k}b^k$ együtthatója a hatvány összeg alakjában.

A kéttagú összeg hatványaiban a tagok együtthatóit **binomiális együtthatóknak** nevezzük a binom = kéttag szó alapján.

Megjegyzés: A binomiális együtthatókat Indiában már a Kr. e. 2. században alkalmazták a sakkjátékkal kapcsolatos kombinatorikai feladatok megoldására, és a 12. századra már ismerték a binomiális tételt is.

Az ábrán látható a Pascal-háromszög 12. századi kínai ábrázolása. Ez alapján nevezhetnék Csu Si-csie-háromszögnek is.

2. példa

A Pascal-háromszögben soronként számítsuk ki az összeget, ha

a) a számok közé mindenhova + jelet írunk.

b) a számok közé felváltva – majd + jelet írunk.

Magyarázzuk meg a szabályosságot!

Megoldás (a)

Az *a)* rész 5. sorára vonatkozó egyenlőség indoklásához írjuk fel a binomiális tételt $a = 1$, $b = 1$, $n = 5$ esetre:

$$\binom{5}{0} \cdot 1^5 + \binom{5}{1} \cdot 1^4 \cdot 1^1 + \binom{5}{2} \cdot 1^3 \cdot 1^2 + \binom{5}{3} \cdot 1^2 \cdot 1^3 + \binom{5}{4} \cdot 1^1 \cdot 1^4 + \binom{5}{5} \cdot 1^5 =$$
$$= (1+1)^5 = 2^5.$$

1	$= 2^0$
$1+1$	$= 2^1$
$1+2+1$	$= 2^2$
$1+3+3+1$	$= 2^3$
$1+4+6+4+1$	$= 2^4$
$1+5+10+10+5+1$	$= 2^5$

Az összeg mindig 2 hatvány.

$$\begin{array}{ll} 1 & \\ 1-1 & =0 \\ 1-2+1 & =0 \\ 1-3+3-1 & =0 \\ 1-4+6-4+1 & =0 \\ 1-5+10-10+5-1 & =0 \end{array}$$

A váltakozó előjelű összeg mindig 0.
Minden második sorban a szimmetria miatt nyilvánvalóan 0 az összeg.

Megoldás (b)

A *b)* rész 5. sorára vonatkozó egyenlőség indoklásához írjuk fel a binomiális tételt $a = 1$, $b = -1$, $n = 5$ esetre:

$$\binom{5}{0}\cdot 1^5+\binom{5}{1}\cdot 1^4\cdot(-1)^1+\binom{5}{2}\cdot 1^3\cdot(-1)^2+\binom{5}{3}\cdot 1^2\cdot(-1)^3+$$
$$+\binom{5}{4}\cdot 1^1\cdot(-1)^4+\binom{5}{5}\cdot(-1)^5=\binom{5}{0}-\binom{5}{1}+\binom{5}{2}-\binom{5}{3}+\binom{5}{4}-\binom{5}{5}=$$
$$=(1-1)^5=0.$$

Ezzel a módszerrel a fenti szabályosság általánosan is igazolható.

Ha tetszőleges $n \ge 1$ egész kitevőre $a = 1$ és $b = 1$ esetre, majd $a = 1$ és $b = -1$ esetre felírjuk a binomiális tételt, megkapjuk a binomiális együtthatókra vonatkozó következő tételt:

binomiális együtthatók összege

TÉTEL: Minden $n \ge 1$ egész számra:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=(1+1)^n=2^n,$$
$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\binom{n}{n-1}+(-1)^n\cdot\binom{n}{n}=(1-1)^n=0.$$

3. példa

a) Hány 3 elemű részhalmaza van egy 5 elemű halmaznak?
b) Hány részhalmaza van egy 5 elemű halmaznak?
c) Hány részhalmaza van egy *n* elemű halmaznak?

Felhasználjuk, hogy a halmazokban az elemek sorrendje nem számít.

Megoldás (a)

A halmaz 5 eleme közül 3-at kell kiválasztani a részhalmazba úgy, hogy az elemek választásának sorrendje nem számít, ezt $\binom{5}{3}=10$-féleképpen tehetjük meg.

Tehát egy 5 elemű halmaznak $\binom{5}{3}=10$ darab 3 elemű részhalmaza van.

Megoldás (b)

I. módszer

Az 5 elemű halmaz részhalmazainak száma annyi, ahány 0, 1, 2, 3, 4 vagy 5 elemű részhalmaza van összesen.

- 0 elemű részhalmaz $\binom{5}{0}=1$ darab van, ez az üres halmaz.
- 1 elemű részhalmaz $\binom{5}{1}=5$ darab van, egy elemet 5-féleképpen választhatunk.

- 2 elemű részhalmaz ugyanannyi van, mint 3 elemű, $\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10$.
- 4 elemű részhalmaz annyi van, ahányféleképpen 4-et kiválaszthatunk vagy egy elemet kihagyhatunk: $\binom{5}{4} = \binom{5}{1} = 5$.
- 5 elemű részhalmaz $\binom{5}{5} = 1$ darab van, ez maga a halmaz. Így az 5 elemű halmaz részhalmazainak száma összesen:

$$\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32.$$

II. módszer

Egy részhalmaz kiválasztását úgy végezzük, hogy a kiválasztott elemek alá + jelet írunk, a többi elem alá – jelet. Így a halmaz minden eleme alá vagy + vagy – jelet írtunk.

Az 5 elemű $\{a; b; c; d; e\}$ halmaz részhalmazai például:

- a $+-+--$ jelsorozatnak megfelelően $\{a; c\}$,
- a $--++-$ jelsorozatnak megfelelően $\{c; d\}$,
- a $++-++$ jelsorozatnak megfelelően $\{a; b; d; e\}$.

Mivel minden részhalmazhoz egyértelműen tartozik egy jelsorozat, és minden jelsorozathoz egyértelműen tartozik egy részhalmaz, a halmaznak ugyanannyi részhalmaza van, ahányféleképpen az elemei alá + vagy – jelet írhatunk.

Minden elemnél két lehetőség közül választhatunk, így a lehetséges jelsorozatok száma, azaz az 5 elemű halmaz részhalmazainak száma: $2^5 = 32$.

Az 5 elemű halmaz részhalmazainak számára a két módszerrel ugyanazt az eredményt kell kapnunk, ezért

$$\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 2^5.$$

Megoldás (c)

I. módszer

Az n elemű halmaznak annyi k elemű részhalmaza van, ahányféleképpen n elemből k darabot ki lehet választani úgy, hogy eltekintünk a sorrendtől, ez $\binom{n}{k}$.

Az n elemű halmaz részhalmazainak száma annyi, ahány $0, 1, 2, \ldots, n-1$ vagy n elemű részhalmaza van összesen, ez

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}.$$

II. módszer

Az n elemű halmaz egy részhalmazának kiválasztásakor minden elemét vagy kiválasztjuk (alá + jelet írunk), vagy nem választjuk ki (alá – jelet írunk). Mivel minden részhalmazhoz egyértelműen tartozik egy jelsorozat, és minden jelsorozathoz egyértelműen tartozik egy részhalmaz, a halmaznak ugyanannyi részhalmaza van, ahányféleképpen az elemei alá + vagy – jelet írhatunk. Minden elemnél két lehetőség közül választhatunk, így a lehetséges jelsorozatok száma, azaz az n elemű halmaz részhalmazainak száma: 2^n.

Az n elemű halmaz részhalmazainak számára a két módszerrel ugyanazt az eredményt kell kapnunk, ezért

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n,$$

így kombinatorikai meggondolásokkal is sikerült bizonyítani az előbbi tételt.

Továbbá igazoltuk a következőt:

***n* elemű halmaz részhalmazainak száma**

TÉTEL: **Minden n természetes szám esetén az n elemű halmaz részhalmazainak száma:**

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n.$$

Ismétléses kombináció

4. példa

Egy kertészeti újságban ötféle növényt kínálnak akciós áron, petúniát, muskátlit, rózsát, szarkalábat, levendulát. Eszter 12 növényt rendel. Hányféleképpen teheti ezt meg, ha egy növényből többet is rendelhet?

Megoldás

Egy lehetséges rendelést ábrázoltunk a táblázatban: a + jelek számával jelöltük, hogy az egyes növényekből hány darabot rendelt. Az egyforma + jelekkel biztosítjuk azt, hogy a növények rendelésének sorrendje lényegtelen, csak az a fontos, hogy melyik sorban hány darab + jel van.

virág	petúnia	muskátli	rózsa	szarkaláb	levendula
darab		++++		++++++	++

A táblázat elhagyásával is lehetséges ez a jelölés, ha a 12 darab + jel közé 4 darab | elválasztó jelet teszünk, ezzel különítve el a növényfajtákat. Ezzel a módszerrel a táblázat szerinti rendelés

$$|++++||++++++|++$$

formában írható fel.

A jelsorozat elején (vagy végén) az elválasztó jel azt jelenti, hogy az első (vagy utolsó) fajta növényből nem rendelt. Két elválasztó jel között a + jelek száma azt jelenti, hogy a megfelelő fajta növényből annyit rendelt. Ha két elválasztó jel egymás mellett van, akkor abból a növényből nem rendelt.

Minden rendelés egyértelműen leírható egy ilyen jelsorozattal, és minden jelsorozathoz egyértelműen tartozik egy rendelés. Tehát a lehetséges rendelések száma annyi, ahányféleképpen a 12 darab + jelet és a 4 darab | elválasztó jelet sorba lehet rendezni.

A 12 + 4 = 16 jel összes lehetséges sorrendje, ha közülük 12 egyforma és 4 egyforma van:

$$\frac{16!}{12!\cdot 4!}=\frac{(12+5-1)!}{12!\cdot(5-1)!}=\binom{12+5-1}{12}=1820.$$

ismétléses kombináció

DEFINÍCIÓ: **Ha n-féle elemből választunk k darabot úgy, hogy a választás sorrendje nem számít és mindegyikféle elemből többet is választhatunk, az n-féle elem k tagú *ismétléses kombinációját* kapjuk.**

TÉTEL: **n-féle elem k tagú ismétléses kombinációinak száma:**

$$\binom{k+n-1}{k}.$$

A példában alkalmazott kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést használva n-féle elem k tagú ismétléses kombinációinak száma ugyanannyi, mint k darab + jelnek és $n-1$ darab | elválasztó jelnek összes lehetséges sorrendje, azaz

$$\frac{(k+n-1)!}{k!\cdot(n-1)!}=\binom{k+n-1}{k}.$$

Feladatok

1. Írjuk fel a binomiális tétel segítségével a következő hatványokat:
a) $(x-2)^5$; *b)* $(3n+2)^5$; *c)* $(y-1)^{10}$; *d)* $(a-b)^n$.

2. Írjuk fel hatvány alakban a következő összegeket:
a) $x^4-4x^3+6x^2-4x+1$; *b)* $a^5+10a^4+40a^3+80a^2+80a+32$.

3. *a)* Hány részhalmaza van egy röplabdacsapat egyszerre pályán levő játékosai (6 fő) halmazának?
b) Hány olyan részhalmaza van a pályán levő játékosoknak, amelyben Péter benne van?
c) Hány olyan részhalmaza van a pályán levő játékosoknak, amelyben Péter nincs benne?

4. Zsuzsi Párizsban 18 képeslapot vásárolt, melyeket 8 fajta képeslap közül választott ki. Hányféleképpen tehette ezt meg?

5. Hány megoldása van az $x+y+z=9$ egyenletnek
a) a természetes számok körében?
b) a pozitív egész számok körében?
c) az egész számok körében?

A trigonometria alkalmazásai

A bennünket körülvevő világ gyakran a matematika nyelvén fedi fel az igazi arcát. Igen gyakori azonban, hogy ezt a nyelvezetet nem értjük, mert még nem alkottunk szavakat, szabályokat hozzá. Amikor azonban ezt sikerül megtennünk, minden korábban érthetetlen és zavaros kép világossá válhat.

Az első írásos emlék, amelyben trigonometriát találunk, Ptolemaiosz Almagest (Nagy gyűjtemény) című könyve, főleg csillagászati munka. A matematikának ezt a fejezetét nem is tekintették önálló témakörnek. A nagy földrajzi felfedezések kora, a térképészet fejlődése azonban nagy lökést adott e terület fejlődésének.

Az első részletes térképet Magyarországról 1514 körül Lázár deák készítette. Ő még nem támaszkodott arra a módszerre, melyet Willebrord Snellius (1591–1626) holland mérnök dolgozott ki, és háromszögelés néven vált ismertté a földmérés tudományában.

8. Az összegzési képletek alkalmazásai (emelt szintű tananyag)

Az előző fejezetben igazolt tételek felhasználásával két irányban is továbbléphetünk. Egyrészt megvizsgálhatjuk a tangens és kotangens szögfüggvények esetében az $\alpha + \beta$ és $\alpha - \beta$ értékére vonatkozó összefüggéseket, másrészt lehetőségünk van arra is, hogy a 2α szögfüggvényeit vizsgáljuk. Ezekre vonatkoznak a következő tételek.

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

TÉTEL: $$\mathbf{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathbf{tg}\,\alpha+\mathbf{tg}\,\beta}{1-\mathbf{tg}\,\alpha\cdot\mathbf{tg}\,\beta}.$$

Természetesen a tétel csak olyan szögekre érvényes, melyek esetén az egyenlőség mindkét oldala értelmezve van.

A bal oldal miatt $\cos(\alpha+\beta)\neq 0$.

A jobb oldalon $\cos\alpha\neq 0$, $\cos\beta\neq 0$ és $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\neq 1$.

Bizonyítás

A bizonyításban a tangensfüggvény definícióját használjuk fel:

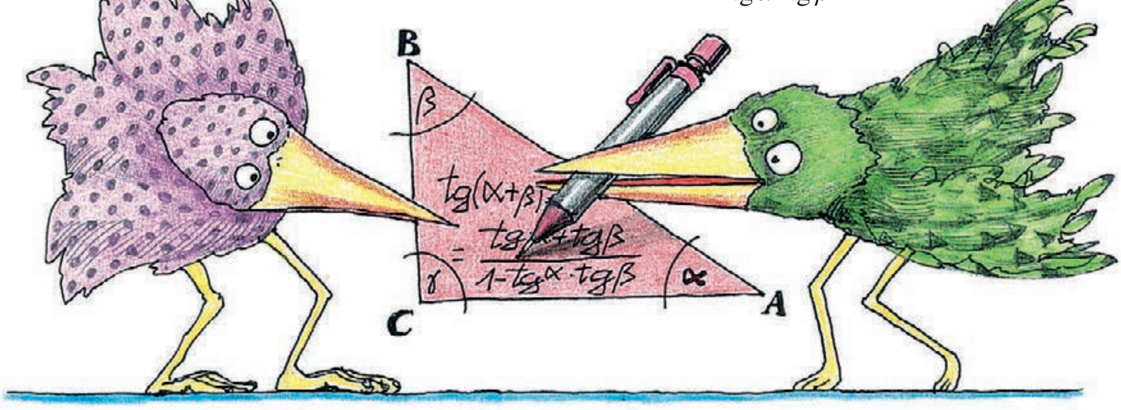
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}.$$

A feltételek miatt a tört számlálóját és nevezőjét is oszthatjuk $\cos\alpha\cdot\cos\beta$-val.

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}.$$

A törteket egyszerűsítve és a tangensfüggvény definícióját felhasználva adódik a bizonyítandó állítás:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}.$$



1. példa

Határozzuk meg tg 75º értékét!

Megoldás

Mivel $75^\circ = 30^\circ + 45^\circ$, ezért az addíciós tételt felhasználva, és a kapott törtet gyöktelenítve, majd egyszerűsítve:

$$\mathrm{tg}\,75^\circ = \mathrm{tg}(30^\circ + 45^\circ) =$$

$$= \frac{\mathrm{tg}\,30^\circ + \mathrm{tg}\,45^\circ}{1 - \mathrm{tg}\,30^\circ \cdot \mathrm{tg}\,45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}+3}{3-\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{3}+3\right)^2}{9-3} = \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{2} = 2+\sqrt{3}.$$

◆ ◆ ◆

Hasonlóan adódik a különbségre vonatkozó állítás is.

TÉTEL: $\mathbf{tg}(\alpha - \beta) = \dfrac{\mathbf{tg}\,\alpha - \mathbf{tg}\,\beta}{1 + \mathbf{tg}\,\alpha \cdot \mathbf{tg}\,\beta}$,

ahol $\cos(\alpha - \beta) \neq 0$; $\cos\alpha \neq 0$; $\cos\beta \neq 0$; $\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta \neq -1$.

$$\mathrm{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta}$$

Bizonyítás

Az előző tételben igazolt képletbe a β szög helyére írjuk mindenhová az ellentettjét, $-\beta$-t, és használjuk fel a $\mathrm{tg}(-\beta) = -\mathrm{tg}\,\beta$ összefüggést.

$$\mathrm{tg}(-\beta) = -\mathrm{tg}\,\beta$$

$$\mathrm{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}(-\beta)}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}(-\beta)} = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta}.$$

◆ ◆ ◆

Ennél is egyszerűbb a 2α szögfüggvényeinek felírása. Itt ugyanis csak azt kell felhasználnunk, hogy $\alpha + \alpha = 2\alpha$.

TÉTEL: $\mathbf{sin}\,2\alpha = 2 \cdot \mathbf{sin}\,\alpha \cdot \mathbf{cos}\,\alpha$;

$\mathbf{cos}\,2\alpha = \mathbf{cos}^2\,\alpha - \mathbf{sin}^2\,\alpha$;

$\mathbf{tg}\,2\alpha = \dfrac{2 \cdot \mathbf{tg}\,\alpha}{1 - \mathbf{tg}^2\,\alpha}$, ahol $\cos 2\alpha \neq 0$; $\cos\alpha \neq 0$; $\mathrm{tg}^2\alpha \neq 1$.

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2 \cdot \mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\,\alpha}$$

Ezek az összefüggések alapot teremtenek ahhoz, hogy meghatározzunk többszörös szögekre vonatkozó összefüggéseket is.

2. példa

Fejezzük ki $\sin 3\alpha$ értékét az α szög szinuszával!

Megoldás

Használjuk fel, hogy $3\alpha = 2\alpha + \alpha$, ezért:

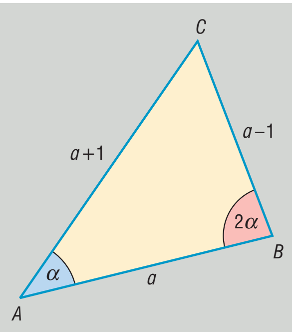
$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cdot \cos\alpha + \cos 2\alpha \cdot \sin\alpha =$$
$$= 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \cdot \sin\alpha =$$
$$= 3 \cdot \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha - \sin^3\alpha.$$

Mivel $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$, ezért:

$$\sin 3\alpha = 3 \cdot \sin\alpha \cdot (1 - \sin^2\alpha) - \sin^3\alpha = 3 \cdot \sin\alpha - 4 \cdot \sin^3\alpha.$$

3. példa

Egy háromszög oldalai egymást követő egész számok. A legnagyobb szög kétszerese a legkisebbnek. Mekkorák a háromszög szögei és oldalai?



37. ábra

Megoldás

Figyelembe véve, hogy nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal található, jelöljük a háromszög oldalait és szögeit az ábrán látható módon. ***(37. ábra)***

A szinusztétel szerint:

$$\frac{a+1}{a-1} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\sin\alpha} = 2 \cdot \cos\alpha.$$

Írjuk fel a koszinusztételt az α szöggel szemben lévő oldalra:

$$(a-1)^2 = a^2 + (a+1)^2 - 2a \cdot (a+1) \cdot \cos\alpha.$$

Helyettesítsük $2 \cdot \cos\alpha$ értékét a szinusztétel alapján, és hozzuk egyszerűbb alakra az így kapott egyenletet:

$$(a-1)^2 = a^2 + (a+1)^2 - a \cdot (a+1) \cdot \frac{a+1}{a-1};$$

$$a^2 - 2a + 1 = a^2 + a^2 + 2a + 1 - \frac{a \cdot (a+1)^2}{a-1};$$

$$a^2 + 4a = \frac{a \cdot (a+1)^2}{a-1}.$$

Mivel $a \neq 0$, ezért a-val az egyenlet mindkét oldalát oszthatjuk, és így:

$$(a+4) \cdot (a-1) = (a+1)^2,$$
$$a^2 + 3a - 4 = a^2 + 2a + 1,$$
$$a = 5.$$

A háromszög oldalainak hossza tehát 4, 5 és 6 egység.

A háromszög α szögére:

$$\cos\alpha = \frac{a+1}{2\cdot(a-1)} = \frac{3}{4}. \quad \text{Innen: } \alpha \approx 41{,}41^\circ.$$

Így a legnagyobb oldallal szemben fekvő szög 82,82º lesz, míg a harmadik szög nagysága a háromszög belső szögeire vonatkozó összefüggést felhasználva 55,77º.

Ha egy 4, 5 és 6 oldalú háromszög szögeit a háromszögben érvényes trigonometrikus tételek valamelyikével meghatározzuk, akkor ugyanezeket a szögeket kapjuk, ami azt jelenti, hogy ez a háromszög valóban megfelel a feladat feltételeinek.

4. példa

Határozzuk meg az α szög szögfüggvényeit, ha tudjuk, hogy $\sin 2\alpha = \frac{1}{3}$.

Megoldás

A feltétel szerint:

$$2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{1}{3}.$$

Mivel az egyenlőség nem teljesülhet $\cos\alpha = 0$ esetén, ezért oszthatunk $2\cdot\cos\alpha$-val:

$$\sin\alpha = \frac{1}{6\cdot\cos\alpha}.$$

Ezt az ismert

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

egyenlőségbe helyettesítve:

$$\frac{1}{36\cdot\cos^2\alpha} + \cos^2\alpha = 1.$$

Az egyenletet beszorozhatjuk a tört nevezőjével:

$$36\cdot\cos^4\alpha - 36\cdot\cos^2\alpha + 1 = 0.$$

A kapott egyenletet megoldva:

$$\cos^2\alpha = \frac{3\pm 2\cdot\sqrt{2}}{6}.$$

Mindkét megoldást el kell fogadnunk, így a megadott feltételeknek négy különböző érték is megfelelhet:

$$\cos\alpha_1 = \sqrt{\frac{3+2\cdot\sqrt{2}}{6}}, \quad \cos\alpha_2 = -\sqrt{\frac{3+2\cdot\sqrt{2}}{6}},$$

$$\cos\alpha_3 = \sqrt{\frac{3-2\cdot\sqrt{2}}{6}}, \quad \cos\alpha_4 = -\sqrt{\frac{3-2\cdot\sqrt{2}}{6}}.$$

Ennek megfelelően $\sin\alpha$ értékére is négy megoldás adódik:

$$\sin\alpha_1 = \frac{1}{6\cdot\sqrt{\frac{3+2\cdot\sqrt{2}}{6}}} = \frac{1}{\sqrt{18+12\cdot\sqrt{2}}}, \quad \sin\alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{18+12\cdot\sqrt{2}}},$$

$$\sin\alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{18-12\cdot\sqrt{2}}}, \quad \sin\alpha_4 = -\frac{1}{\sqrt{18-12\cdot\sqrt{2}}}.$$

Mivel $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, így felhasználva a feladat $\sin\alpha = \dfrac{1}{6\cdot\cos\alpha}$ feltételét:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{6\cdot\cos^2\alpha}.$$

Ebből adódóan a $\operatorname{tg}\alpha$ lehetséges értékei:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{1}{6\cdot\left(\pm\sqrt{\dfrac{3+2\cdot\sqrt{2}}{6}}\right)^2} = \frac{1}{3+2\cdot\sqrt{2}} = 3-2\cdot\sqrt{2},$$

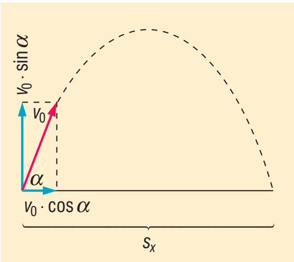
illetve

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{1}{6\cdot\left(\pm\sqrt{\dfrac{3-2\cdot\sqrt{2}}{6}}\right)^2} = \frac{1}{3-2\cdot\sqrt{2}} = 3+2\cdot\sqrt{2}.$$

A $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ alapján a $\operatorname{ctg}\alpha$ lehetséges értékei:

$$\operatorname{ctg}\alpha_1 = \frac{1}{3-2\cdot\sqrt{2}} = 3+2\cdot\sqrt{2},\quad \operatorname{ctg}\alpha_2 = \frac{1}{3+2\cdot\sqrt{2}} = 3-2\cdot\sqrt{2}.$$

Megfigyelhetjük, hogy addig, amíg az α szög szinuszára és koszinuszára négy lehetséges érték is adódhat, addig a tangens és kotangens értékére csak két értéket kaptunk. Ez a $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ hányados képzési szabá-



38. ábra

5. példa

Milyen szögben kell elhajítani egy követ, ha azt szeretnénk, hogy a vízszintes talajon a legmesszebbre jusson? (A közegellenállástól tekintsünk el.)

Megoldás

Ha egy követ a vízszintessel α szöget bezáró, v_0 kezdősebességgel elhajítunk, akkor tudjuk, hogy mozgását két, egymástól független mozgás összegeként foghatjuk fel. ***(38. ábra)***

Az egyik egy vízszintes irányú, egyenes vonalú egyenletes mozgás, melynek sebessége $v_0\cdot\cos\alpha$ állandó marad, hiszen ebben az irányban nem hat rá erő, amely gyorsítaná vagy lassítaná.

Függőlegesen viszont egyenes vonalú egyenletesen változó mozgást végez, melynek kezdősebessége $v_0\cdot\sin\alpha$, a gyorsulása viszont $-g$ lesz. (A gyorsulásnál figyelembe vesszük, hogy $\vec{a}$ a kezdősebesség vektorral ellentétes irányú!)

Ha a mozgás t ideig tart, akkor a függőleges elmozdulása 0 lesz, hiszen az elindulási szintjére érkezik vissza:

Ebből az egyenletből kifejezhető az α szög függvényében a kő repülési ideje:

$$t = \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin\alpha}{g}.$$

Most úgy kell megválasztanunk az α szöget, hogy a kőnek a vízszintes elmozdulása a lehető legnagyobb legyen:

$$s_x = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin\alpha}{g} =$$

$$= \frac{v_0^2 \cdot 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \cdot \sin 2\alpha.$$

A kapott összefüggés alapján ez akkor valósul meg, ha $\sin 2\alpha$ értéke maximális, ez pedig figyelembe véve a szinuszfüggvény értékkészletét, akkor lesz, ha:

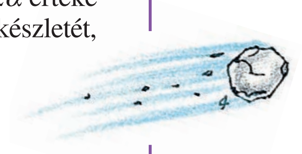
$$\sin 2\alpha = 1.$$

Ebből adódik, hogy $2\alpha = 90°$, azaz $\alpha = 45°$.

A követ tehát akkor tudjuk a legmesszebbre hajítani, ha 45°-os szögben dobjuk el.

A vízszintes irányú elmozdulás:
$s_x = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t.$

A függőleges irányú elmozdulás:
$s_y = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{g}{2} \cdot t^2.$



Feladatok

1. Határozzuk meg a következő szögek tangensének értékét számológép és függvénytáblázat használata nélkül:

a) 15°; *b)* –75°; *c)* 105°.

2. Igazoljuk a kotangensfüggvény esetén teljesülő addíciós tételeket:

a) $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}$; *b)* $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}$.

3. Bizonyítsuk be, hogy $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2 \cdot \operatorname{ctg}\alpha}$.

4. Határozzuk meg az α szög szögfüggvényeit ha tudjuk, hogy:

a) $\sin 2\alpha = \frac{1}{4}$; *b)* $\cos 2\alpha = \frac{1}{3}$; *c)* $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4}$; *d)* $\operatorname{ctg}\alpha = 2$.

5. Fejezzük ki $\cos 3\alpha$ értékét az α szög koszinuszával!

6. Igazoljuk a következő azonosságokat:

a) $\frac{2}{\sin 2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$; *b)* $\frac{\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha} = 2 \cdot \operatorname{ctg}\alpha$;

c) $2 \cdot [\cos(45° + \alpha)]^2 = 1 - \sin 2\alpha$.

7. Egy háromszög két oldala 6 cm és 7 cm, a velük szemben lévő szögek aránya 1 : 2. Mekkorák a háromszög szögei és ismeretlen oldalai?

8. Egy háromszög két oldala 20 cm és 24 cm, az általuk bezárt szög szögfelezője 22 cm hosszú. Mekkora a két oldal által bezárt szög?

Koordináta-geometria

A koordináta-geometria (más néven analitikus geometria) alapvető jellemzője, hogy a geometriai problémákat, feladatokat algebrai módszerekkel, koordináta-rendszer segítségével tárgyalja és oldja meg.

A geometriának ez az algebrai megközelítése először Apollóniusz kúpszeletekről írt nyolckötetes könyvében jelenik meg a Kr. e. 3. században.

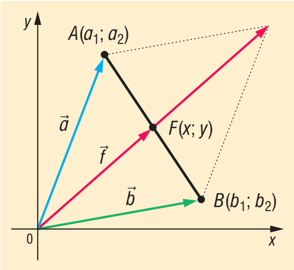
Hipparkhosz (Kr. e. 2. század) úgynevezett gömbi koordinátákat használt a Föld bizonyos helyének meghatározására.

Papposz (Kr. u. 4. század) Szünagógé (Gyűjtemény) című művében a geometriát zömében algebrai módszerekkel tárgyalja.

Descartes 1637-ben megjelent Géométrie c. könyvét tekintjük az első koordináta-geometriai műnek. Ebben a szerző már következetesen használja a kor fejlettségi szintjének megfelelő algebrát az ókori geometriára.

3. Szakasz osztópontjának koordinátái. A háromszög súlypontjának koordinátái

Szakasz felezőpontjának koordinátái



10. ábra

10. osztályban meghatároztuk egy adott szakasz felezőpontjának helyvektorát tetszőleges vonatkoztatási pontra nézve a szakasz két végpontjának helyvektora segítségével. Most meg fogjuk adni egy adott szakasz felezőpontjának koordinátáit a derékszögű koordináta-rendszerben a végpontok koordinátái segítségével.

Adott az $A(a_1; a_2)$ és $B(b_1; b_2)$ pontok által meghatározott szakasz ***(10. ábra)***. Legyen a szakasz felezőpontja $F(x; y)$. Célunk az x és y koordináták meghatározása az A és B pontok koordinátáinak segítségével.

$$\vec{f} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$$

$$F\left(\frac{a_1+b_1}{2}; \frac{a_2+b_2}{2}\right)$$

Ha az A, B és F pontok helyvektorai rendre $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{f}$, akkor a vektorok összegzésének paralelogramma szabálya alapján – felhasználva, hogy a paralelogramma átlói felezik egymást – adódik, hogy

$$\vec{f} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}.$$

Vektorok összegének és vektor számszorosának koordinátáira vonatkozó összefüggések alapján

$$x = \frac{a_1+b_1}{2} \quad \text{és} \quad y = \frac{a_2+b_2}{2},$$

azaz **a felezőpont koordinátái a végpontok megfelelő koordinátáinak számtani közepeként adódnak.**

1. példa

Egy paralelogramma átlóinak metszéspontja az $M(2; 3)$ pont, két szomszédos csúcsa $A(0; 5)$ és $B(-1; 1)$. Számítsuk ki a másik két csúcs koordinátáit.

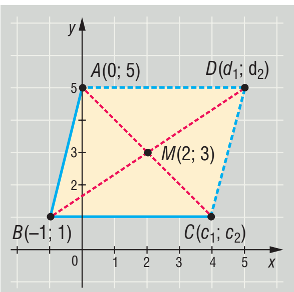
Megoldás

Mivel a paralelogramma átlói felezik egymást, ezért M egyaránt felezi az AC és BD szakaszokat ***(11. ábra)***.

Így
$$2 = \frac{0+c_1}{2} \quad \text{és} \quad 3 = \frac{5+c_2}{2}, \text{ ahonnan } c_1 = 4 \text{ és } c_2 = 1.$$

Hasonlóan:
$$2 = \frac{-1+d_1}{2} \quad \text{és} \quad 3 = \frac{1+d_2}{2}, \text{ így } d_1 = 5 \text{ és } d_2 = 5.$$

Kaptuk tehát, hogy a paralelogramma hiányzó két csúcsa: $C(4; 1)$, $D(5; 5)$.



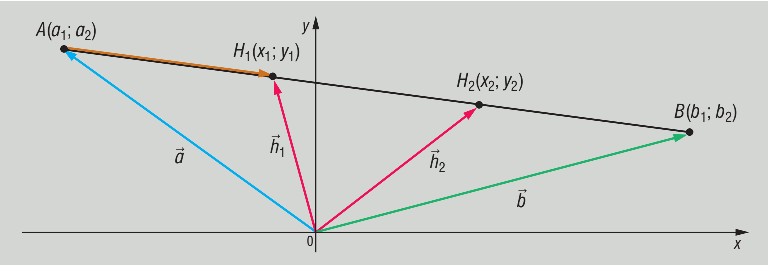
11. ábra

Szakasz harmadolópontjának koordinátái

Legyenek adottak az $A(a_1; a_2)$ és $B(b_1; b_2)$ pontok, és adjuk meg az AB szakasz A-hoz közelebbi $H_1(x_1; y_1)$ harmadolópontjának koordinátáit a végpontok koordinátáinak segítségével.

Ha az A, B és H_1 pontok helyvektorai rendre $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{h_1}$ ***(12. ábra)***, akkor

$$\vec{h_1} = \vec{a} + \overrightarrow{AH_1}.$$



12. ábra

Viszont $\overrightarrow{AH_1} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3} \cdot (\vec{b} - \vec{a})$, így

$$\vec{h_1} = \vec{a} + \frac{1}{3} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \frac{3 \cdot \vec{a} + \vec{b} - \vec{a}}{3} = \frac{2 \cdot \vec{a} + \vec{b}}{3} = \frac{2}{3} \cdot \vec{a} + \frac{1}{3} \cdot \vec{b}.$$

$$\vec{h_1} = \frac{2}{3} \cdot \vec{a} + \frac{1}{3} \cdot \vec{b}$$

$$\vec{h_2} = \frac{1}{3} \cdot \vec{a} + \frac{2}{3} \cdot \vec{b}$$

A koordinátákra nézve tehát

$$x_1 = \frac{2 \cdot a_1 + b_1}{3} = \frac{2}{3} \cdot a_1 + \frac{1}{3} \cdot b_1;$$

$$y_1 = \frac{2 \cdot a_2 + b_2}{3} = \frac{2}{3} \cdot a_2 + \frac{1}{3} \cdot b_2.$$

Hasonló módon bizonyítható, hogy az AB szakasz B-hez közelebbi $H_2(x_2; y_2)$ harmadolópontjának koordinátái

$$x_2 = \frac{a_1 + 2 \cdot b_1}{3} = \frac{1}{3} \cdot a_1 + \frac{2}{3} \cdot b_1;$$

$$y_2 = \frac{a_2 + 2 \cdot b_2}{3} = \frac{1}{3} \cdot a_2 + \frac{2}{3} \cdot b_2.$$

$$H_1\left(\frac{2 \cdot a_1 + b_1}{3}; \frac{2 \cdot a_2 + b_2}{3}\right)$$

$$H_2\left(\frac{a_1 + 2 \cdot b_1}{3}; \frac{a_2 + 2 \cdot b_2}{3}\right)$$

2. példa

Számítsuk ki az $A(4; -1)$ és $B(-2; 6)$ pontok által meghatározott szakasz $P(x; y)$ pontjának koordinátáit, ha $AP = 2 \cdot PB$.

Megoldás

A feltételből adódik, hogy P az AB szakasz B-hez közelebbi harmadolópontja. Ekkor a fenti összefüggéseket figyelembe véve

$$x = \frac{4 + 2 \cdot (-2)}{3} = 0 \quad \text{és} \quad y = \frac{-1 + 2 \cdot 6}{3} = 11.$$

P illeszkedik az y tengelyre, és második koordinátája (ordinátája) 11.

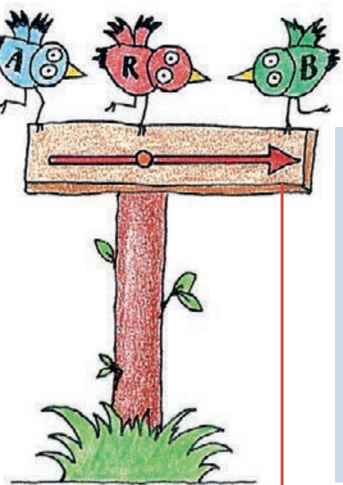
Szakaszt adott arányban osztó pont koordinátái (kiegészítő anyag)

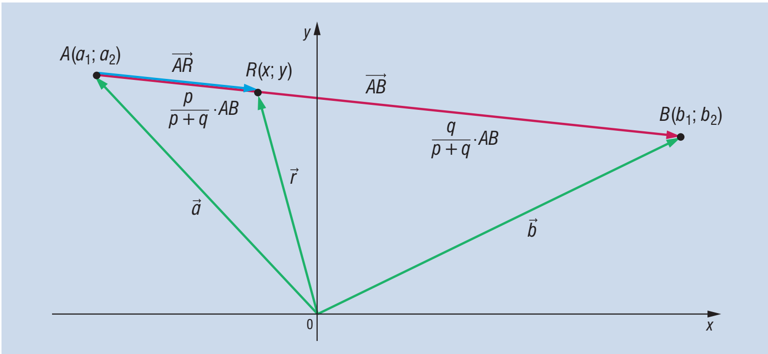
Most az $A(a_1; a_2)$ és $B(b_1; b_2)$ pontok által meghatározott szakasz azon $R(x; y)$ pontjának koordinátáit keressük, amelyre $AR : RB = p : q$. A harmadolópont koordinátáinak meghatározásakor alkalmazott módszert alkalmazhatjuk ebben az általános esetben is.

Legyenek az A, B és R pontok helyvektorai rendre $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{r}$ **(13. ábra)**.

Mivel $\dfrac{AR}{RB} = \dfrac{p}{q}$, ezért

$$\frac{AR}{AB} = \frac{AR}{AR+RB} = \frac{1}{1+\dfrac{RB}{AR}} = \frac{1}{1+\dfrac{q}{p}} = \frac{p}{p+q}.$$





13. ábra

Ezt felhasználva az R pont $\vec{r}$ helyvektorára kapjuk:

$$\vec{r} = \vec{a} + \overrightarrow{AR} = \vec{a} + \frac{p}{p+q}\cdot\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \frac{p}{p+q}\cdot(\vec{b}-\vec{a}) =$$

$$= \frac{(p+q)\cdot\vec{a} + p\cdot\vec{b} - p\cdot\vec{a}}{p+q} = \frac{q\cdot\vec{a}+p\cdot\vec{b}}{p+q} = \frac{q}{p+q}\cdot\vec{a} + \frac{p}{p+q}\cdot\vec{b}.$$

$$\vec{r} = \frac{q\vec{a}+p\vec{b}}{p+q}$$

Így az R pont koordinátáira

$$x = \frac{q\cdot a_1 + p\cdot b_1}{p+q} = \frac{q}{p+q}\cdot a_1 + \frac{p}{p+q}\cdot b_1;$$

$$\text{és}\quad y = \frac{q\cdot a_2 + p\cdot b_2}{p+q} = \frac{q}{p+q}\cdot a_2 + \frac{p}{p+q}\cdot b_2.$$

$$R\left(\frac{qa_1+pb_1}{p+q}; \frac{qa_2+pb_2}{p+q}\right)$$

Megjegyzések:

1. Ha $p = q = 1$, akkor a felezőpont koordinátáit kapjuk.
   Ha $p = 1$, $q = 2$ vagy $p = 2$, $q = 1$, akkor a harmadolópontok koordinátái adódnak a fenti általános összefüggésekből.
2. A fenti eredmények közvetlen következménye, hogy az AB szakasz egy tetszőleges R pontjának $\vec{r}$ helyvektora a végpontokba mutató $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok segítségével ($\vec{a}$ és $\vec{b}$ lineáris kombinációjaként) előáll $\vec{r} = \alpha\cdot\vec{a} + \beta\cdot\vec{b}$ alakban, ahol α és β olyan nemnegatív valós számok, amelyekre $\alpha + \beta = 1$.

Ekkor ha R belső pont:

$$\frac{AR}{RB}=\frac{\frac{AR}{AB}}{\frac{RB}{AB}}=\frac{\beta}{\alpha}.$$

Ha $R=A$, akkor $\beta=0$, $\alpha=1$, ha $R=B$, akkor $\alpha=0$, $\beta=1$.

3. példa

Számítsuk ki az $A(-4; 2)$ és $B(3; -6)$ pontok által meghatározott szakasz azon $P(x; y)$ pontjának koordinátáit, amelyre teljesül, hogy $AP : PB = 2 : 3$.

Megoldás

A feltételből adódik, hogy $AP=\frac{2}{5}\cdot AB$ és $PB=\frac{3}{5}\cdot AB$. Így

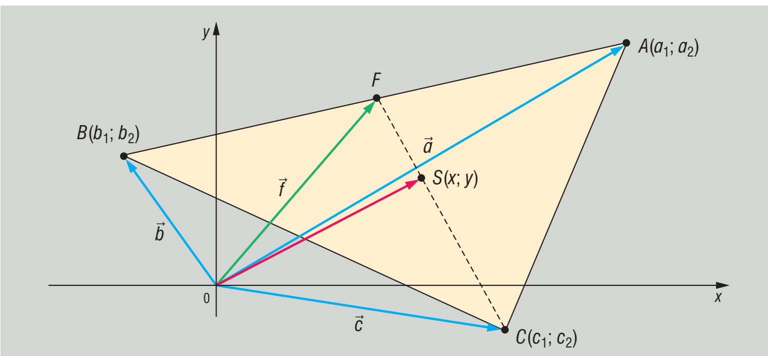
$$x=\frac{3\cdot(-4)+2\cdot 3}{5}=-\frac{6}{5}\quad \text{és}\quad y=\frac{3\cdot 2+2\cdot(-6)}{5}=-\frac{6}{5}.$$

Tehát a $P\left(-\frac{6}{5}; -\frac{6}{5}\right)$ pontra teljesül a feladat feltétele.

A háromszög súlypontjának koordinátái

A háromszög súlypontjának helyvektorát tetszőleges vonatkoztatási pontra nézve 10. osztályban a csúcsokba mutató helyvektorok segítségével adtuk meg. Most az ott alkalmazott eljárás felelevenítésével megadjuk a koordináta-rendszerben a súlypont koordinátáit a csúcsok koordinátáival kifejezve.

Legyenek az ABC háromszög $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$ és $C(c_1; c_2)$ csúcsainak helyvektorai rendre $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$ ***(14. ábra)***.



14. ábra

Ha F az AB szakasz felezőpontja, akkor az F pont $\vec{f}$ helyvektora

$$\vec{f}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}.$$

Ha a CF szakasz F-hez közelebbi S harmadolópontjának helyvektora $\vec{s}$, akkor

$$\vec{s}=\frac{2\cdot\vec{f}+\vec{c}}{3}=\frac{2\cdot\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}+\vec{c}}{3}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}.$$

$$\vec{s}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

Mivel a fenti kifejezés független attól, hogy melyik oldal megfelelő felezőpontjából indulunk ki, ezért mindhárom súlyvonalnak a megfelelő csúcstól távolabbi harmadolópontja ugyanaz az S pont. Ezzel bebizonyítottuk azt is, hogy a háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást. (Ez a bizonyítás a 10. osztályos tankönyvben is megtalálható.)

A fenti vektoros előállításból adódik, hogy az $S(x;\,y)$ súlypont koordinátái

$$S\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3};\ \frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$$

$$x=\frac{a_1+b_1+c_1}{3}\quad \text{és}\quad y=\frac{a_2+b_2+c_2}{3},$$

azaz **a háromszög súlypontjának koordinátái a csúcsok megfelelő koordinátáinak számtani közepeként adódnak.**

4. példa

Egy háromszög két csúcsa $A(-2;\,-3)$, $B(1;\,8)$. Számítsuk ki a harmadik csúcs koordinátáit, ha a súlypont $S(4;\,1)$.

Megoldás

Ha a háromszög harmadik csúcsa $C(x;\,y)$, akkor

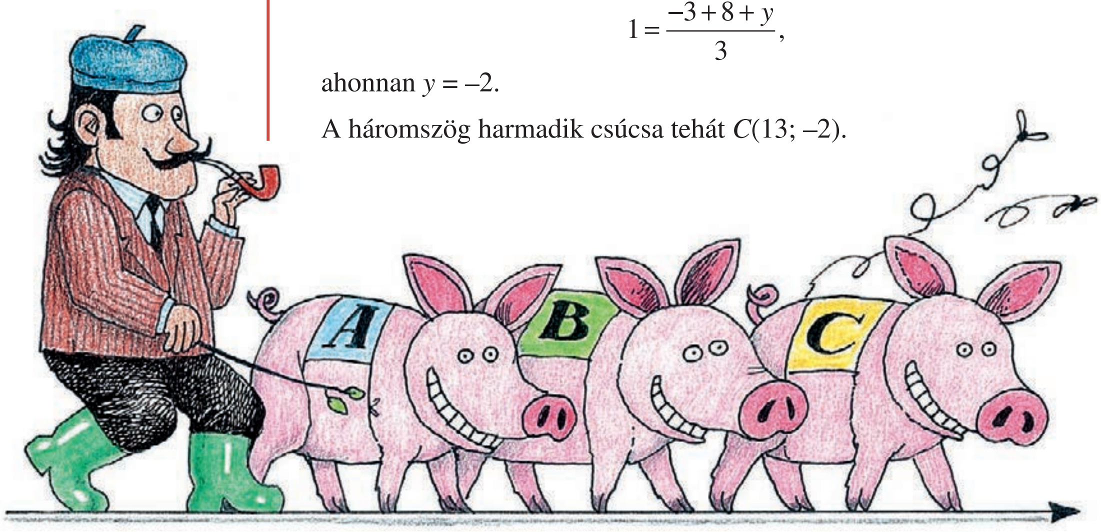
$$4=\frac{-2+1+x}{3},$$

ahonnan $x=13$, és

$$1=\frac{-3+8+y}{3},$$

ahonnan $y=-2$.

A háromszög harmadik csúcsa tehát $C(13;\,-2)$.



Feladatok

1. Számítsuk ki az AB szakasz felezőpontjának koordinátáit, ha

a) $A(0; 1)$, $B(3; 2)$; *b)* $A(4; 1)$, $B(-1; 6)$;
c) $A(-2; -5)$, $B(7; -10)$; *d)* $A(8; -7)$, $B(-4; 5)$.

2. Az AB szakaszt mindkét irányban meghosszabbítjuk önmagával. Számítsuk ki a végpontok koordinátáit, ha A és B az előző feladatban adott pontok.

3. Számítsuk ki az 1. feladatban megadott A és B pontok által meghatározott szakasz harmadolópontjainak koordinátáit.

4. Az AB szakaszt mindkét irányban meghosszabbítjuk a kétszeresével. Számítsuk ki a végpontok koordinátáit, ha A és B az 1. feladatban megadott pontok.

5. Határozzuk meg az $A(-6; 3)$ és $B(5; -4)$ pontok által meghatározott szakasz azon P pontjának koordinátáit, amelyre $AP : PB =$

a) $1 : 2$; *b)* $1 : 3$; *c)* $3 : 2$;
d) $3 : 5$; *e)* $5 : 2$; *f)* $\frac{3}{4} : \frac{5}{6}$.

6. Egy paralelogramma három csúcsa $(-2; 2)$, $(2; -3)$ és $(-5; -4)$. Határozzuk meg a negyedik csúcs és az átlók metszéspontjának koordinátáit.

7. Az $ABCD$ négyszög csúcsai $A(-6; -2)$, $B(5; -1)$, $C(6; 4)$ és $D(3; 6)$. A négyszög mindkét középvonala esetén számítsuk ki a felezőpont koordinátáit. Mit tapasztalunk? Általánosítsunk!

8. Számítsuk ki az ABC háromszög súlypontjának koordinátáit, ha

a) $A(0; 2)$, $B(6; 0)$, $C(3; 7)$; *b)* $A(-6; -2)$, $B(5; -1)$, $C(3; 6)$;
c) $A(2; -3)$, $B(5; -4)$, $C(-6; -1)$.

9. Adott egy háromszög A és B csúcsa, valamint S súlypontja. Számítsuk ki a harmadik csúcs koordinátáit, ha

a) $A(0; 0)$, $B(2; 5)$, $S(2; 1)$; *b)* $A(-3; 1)$, $B(2; 6)$, $S(3; -1)$;
c) $A(5; -2)$, $B(-3; 3)$, $S(4; -7)$.

10. Egy háromszög oldalfelező pontjai $(-2; -2)$, $(5; 1)$, $(3; 4)$.

a) Számítsuk ki a háromszög csúcsainak koordinátáit.
b) Számítsuk ki az eredeti és az oldalfelező pontok által meghatározott háromszögek súlypontjának koordinátáit. Mit tapasztalunk?

11. Az ABC háromszög A csúcsának helyvektora $\vec{a}(-2; 3)$, $\overrightarrow{AB} = 7\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ és $\overrightarrow{CB} = 3\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$. Számítsuk ki a háromszög csúcsainak és súlypontjának koordinátáit.