Kosztolányi József
Kovács István
Pintér Klára
Urbán János
Vincze István

sokszínű Matematika 10

DIGITÁLIS VÁLTOZATBAN IS ELÉRHETŐ
Aktiváló kóddal

MOZAIK

Kosztolányi József
Kovács István
Pintér Klára
Urbán János
Vincze István

Matematika

tankönyv

10

Az új kerettanterv szerinti
hatodik, változatlan kiadás

Mozaik Kiadó – Szeged, 2019

Gondolkodási módszerek 1

A gyökvonás 2

A másodfokú egyenlet 3

Geometria 4

Szögfüggvények 5

Valószínűség-számítás 6

Gondolkodási módszerek

A gyökvonás

A másodfokú egyenlet

Geometria

Szögfüggvények

Valószínűség-számítás

Útmutató a tankönyv használatához

A könyv jelrendszere és kiemelései segítenek a tananyag elsajátításában.

– A kidolgozott példák gondolatmenete mintát ad a módszerek, eljárások megértéséhez és a további feladatok megoldásához.
– A legfontosabb definíciókat és tételeket színes kiemelés jelzi.
– A tananyag apró betűvel szedett részei és a bordó színnel megjelölt kidolgozott mintapéldák a mélyebb megértést segítik. Ezek az ismeretek szükségesek az emelt szintű érettségihez.
– A margón ábrák, az adott lecke főbb vázlatpontjai, ismétlő, magyarázó részek, valamint matematikatörténeti érdekességek találhatók.

A mintapéldák és a kitűzött feladatok nehézségét három különböző színnel jelöltük:

Sárga: elemi szintű gyakorló feladatok, amelyek megoldása, begyakorlása nélkülözhetetlen a továbbhaladáshoz.
Kék: a középszintű érettséginek megfelelő színvonalú feladatok.
Bordó: az emelt szintű érettségire való felkészülést segítő problémák, feladatok.

Ezek a színkódok megfelelnek a Mozaik Kiadó Sokszínű matematika feladatgyűjteményeiben alkalmazott jelöléseknek. A feladatgyűjtemény-sorozat több mint 3000, a gyakorláshoz, az órai munkához és az érettségi felkészüléshez is alkalmas feladatot tartalmaz.

A kitűzött feladatok végeredményei megtalálhatók a *www.mozaik.info.hu* honlapon.

A tankönyv feldolgozásához további segédanyagokat kínál a *www.mozaweb.hu* oldal.

◆ ◆ ◆

A matematika, a ráció, a logikus gondolkodás világunk megismerésének egyik talán leghatékonyabb eszköze, amely néha megmagyarázhatatlan jelenségekkel társul. Elválaszthatatlan a gondolkodó embertől, és teljessé teszi mindennapi tevékenységeit.

Néhány gondolat azoktól, akik mindezt megtapasztalták:

„Mi hát a ráció, amiből az emberi ész a logikát kreálta? Nyilvánvaló, hogy ’benne van’ a természetben, különben nem lehetne a természetet racionális eszközökkel megérteni. A ráció embert, állatot és természetet egyesít.” (Kertész Imre, Nobel-díjas magyar író)

„Az évszázadok során a matematikusok kollektív tudata megalkotta saját univerzumát. Hogy ez hol van, nem tudom – s gondolom, a ’hol’ szó itt értelmét is veszti –, de biztosíthatom az olvasót: ez a matematikai univerzum nagyon is reális annak a számára, aki benne él. Az emberiség éppen a matematika révén hatolt be legmélyebben környező világa rejtelmeibe.” (Ian Stewart)

„A szigorú bizonyítás rendszerint az utolsó lépés! Előtte sok sejtést kell tenni, és ezeknél az esztétikai meggyőződés rendkívül fontos.” (Roger Penrose)

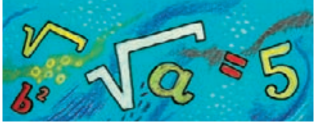
„A matematikus – akárcsak a festő vagy a költő – a forma mestere. ... A matematikai formáknak – akárcsak a festő vagy a költő formáinak – szépeknek kell lennie...” (G. H. Hardy)

Eredményes munkát és tanulást kívánnak a Szerzők.

A gyökvonás

Az ókortól napjainkig a mindennapi élet egyre bonyolultabb problémákat vetett fel a számításokkal foglalkozó emberek számára. A „matematikusok” a felvetődő feladatok során új módszereket, fogalmakat találtak ki.

Már az ókorban kialakult a racionális és irracionális szám fogalma. A számok gyökének jelölésére a középkori Európában a latin radix (gyökér) szó első betűjét, az R-t használták. Körülbelül négyszáz éve váltak általánossá a mai jelek.



2. A négyzetgyökvonás azonosságai

9. osztályban a függvények kapcsán már definiáltuk a nemnegatív számok négyzetgyökét.

négyzetgyök

$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, ha $a \geq 0$

DEFINÍCIÓ: Ha $a \geq 0$, akkor $\sqrt{a}$ jelöli azt a nemnegatív számot, amelynek a négyzete a.

A hatványozáshoz hasonlóan a négyzetgyökvonás esetén is érvényesek bizonyos számítási szabályok, **azonosságok.**

I. azonosság

$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

$a \geq 0$; $b \geq 0$

TÉTEL: Szorzat négyzetgyöke egyenlő a tényezők négyzetgyökének szorzatával.

$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, ha $a \geq 0$ és $b \geq 0$.

Bizonyítás

Mivel a **nemnegatív számok** körében a négyzetre emelés és a négyzetgyökvonás kölcsönösen egyértelmű, ezért megtehetjük, hogy az egyenlőség két oldalán álló kifejezések négyzetét hasonlítjuk össze.

$$\left(\sqrt{a \cdot b}\right)^2 \overset{\text{definíció}}{=} a \cdot b; \quad \left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 \overset{\substack{\text{hatványozás} \\ \text{III. azonosság}}}{=} \left(\sqrt{a}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{b}\right)^2 \overset{\text{definíció}}{=} a \cdot b.$$

Mivel a két kifejezés négyzete egyenlő, ezért az eredeti kifejezések is egyenlőek.

NICOLAS CHUQUET [süké] francia orvos 1484-ben megjelent „A számok tudománya három részben” című művében a $\sqrt{14}$-et így írja: $R^2 14$.

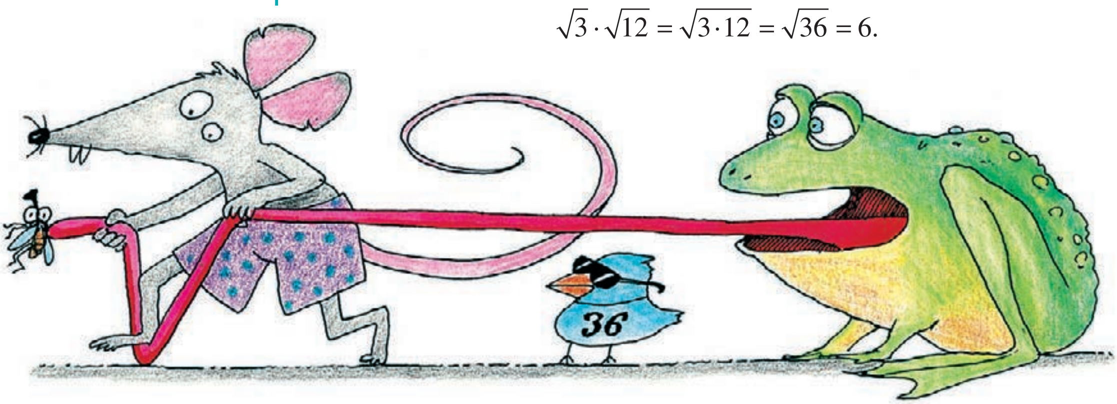
1. példa

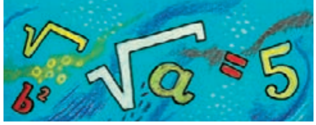
Számítsuk ki a $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$ szorzat értékét!

Megoldás

Írjuk fel a szorzatot egy gyökjellel az I. azonosság alapján:

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6.$$





TÉTEL: **Tört négyzetgyöke megegyezik a számláló és a nevező négyzetgyökének hányadosával.**

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \text{ ha } a \ge 0 \text{ és } b > 0.$$

II. azonosság

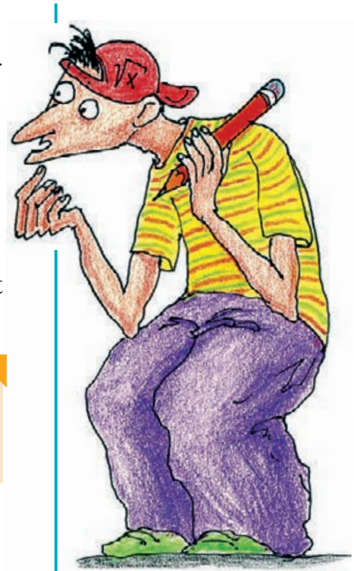
$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$
$$a \ge 0;\ b > 0$$

Bizonyítás

Hasonlítsuk össze az egyenlőség két oldalán álló nemnegatív kifejezések négyzeteit!

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 \overset{\text{definíció}}{=} \frac{a}{b}; \qquad \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 \overset{\substack{\text{hatványozás}\\ \text{IV. azonosság}}}{=} \frac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{\left(\sqrt{b}\right)^2} \overset{\text{definíció}}{=} \frac{a}{b}.$$

Mivel mindkét kifejezés **nemnegatív** és négyzeteik egyenlőek, ezért a kifejezések is egyenlőek.



2. példa

Számítsuk ki a $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ hányadost!

Megoldás

A II. azonosság alapján a kifejezés átírható: $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{12}{3}}=\sqrt{4}=2.$

TÉTEL: **A négyzetgyökvonás és a hatványozás művelete felcserélhető.**

$$\left(\sqrt{a}\right)^k=\sqrt{a^k}, \text{ ahol } a > 0 \text{ és } k \in \mathbb{Z}.$$

III. azonosság

$$\left(\sqrt{a}\right)^k=\sqrt{a^k}$$
$$a > 0;\ k \in \mathbb{Z}$$

Bizonyítás

Ebben az esetben is érdemes az egyenlőség két oldalán álló pozitív kifejezések négyzetét összehasonlítani.

$$\left[\left(\sqrt{a}\right)^k\right]^2 \overset{\substack{\text{hatványozás}\\ \text{V. azonosság}}}{=} \left(\sqrt{a}\right)^{2k} \overset{\substack{\text{hatványozás}\\ \text{V. azonosság}}}{=} \left[\left(\sqrt{a}\right)^2\right]^k \overset{\text{definíció}}{=} a^k; \qquad \left(\sqrt{a^k}\right)^2 \overset{\text{definíció}}{=} a^k.$$

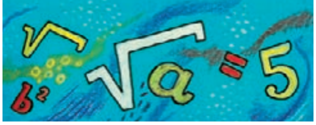
Mindkét oldal **pozitív** és a négyzeteik megegyeznek, ezért a kifejezések is egyenlőek.

3. példa

Melyik nagyobb: a $\left(\sqrt{3}\right)^5$ vagy a $\left(\sqrt{5}\right)^3$?

Megoldás

Mivel $\left(\sqrt{3}\right)^5=\sqrt{3^5}=\sqrt{243}$ és $\left(\sqrt{5}\right)^3=\sqrt{5^3}=\sqrt{125}$, és a $\sqrt{x}$ $(x \ge 0)$ függvény szigorúan növekvő, ezért a $\left(\sqrt{3}\right)^5$ a nagyobb.



4. példa

Végezzük el a következő műveleteket!

a) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\cdot\left(2\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)$;

b) $\left(\sqrt{7}+4\right)^2$;

c) $\left(\sqrt{11}-\sqrt{6}\right)\cdot\left(\sqrt{11}+\sqrt{6}\right)$.

Megoldás

a) Az első összeg mindegyik tagját szorozzuk a második tagjaival, és alkalmazzuk az I. azonosságot:

$$\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\cdot\left(2\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)=\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}+\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{3}-\left(\sqrt{5}\right)^2=$$
$$=2\cdot 3-\sqrt{15}+2\sqrt{15}-5=1+\sqrt{15}.$$

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

b) Alkalmazzuk a kéttagú összeg négyzetére vonatkozó azonosságot:

$$\left(\sqrt{7}+4\right)^2=\left(\sqrt{7}\right)^2+2\cdot\sqrt{7}\cdot 4+4^2=7+8\cdot\sqrt{7}+16=23+8\sqrt{7}.$$

$(a-b)\cdot(a+b) = a^2-b^2$

c) Mivel $(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2$, ezért

$$\left(\sqrt{11}-\sqrt{6}\right)\cdot\left(\sqrt{11}+\sqrt{6}\right)=\left(\sqrt{11}\right)^2-\left(\sqrt{6}\right)^2=11-6=5.$$

5. példa

Számítsuk ki a következő kifejezések értékét!

a) $\sqrt{\sqrt{13}-2}\cdot\sqrt{\sqrt{13}+2}$; *b)* $\left(\sqrt{8+\sqrt{15}}-\sqrt{8-\sqrt{15}}\right)^2$.

Megoldás

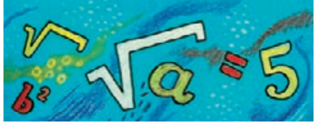
a) Végezzük el a szorzást egy gyökjel alatt az I. azonosság alapján:

$$\sqrt{\sqrt{13}-2}\cdot\sqrt{\sqrt{13}+2}=\sqrt{\left(\sqrt{13}-2\right)\cdot\left(\sqrt{13}+2\right)}=$$
$$=\sqrt{\left(\sqrt{13}\right)^2-2^2}=\sqrt{13-4}=\sqrt{9}=3.$$

b) Végezzük el a négyzetre emelést, majd a kétszeres szorzatot írjuk egy gyökjel alá:

$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

$$\left(\sqrt{8+\sqrt{15}}-\sqrt{8-\sqrt{15}}\right)^2=$$
$$=8+\sqrt{15}-2\cdot\sqrt{8+\sqrt{15}}\cdot\sqrt{8-\sqrt{15}}+8-\sqrt{15}=$$
$$=16-2\cdot\sqrt{\left(8+\sqrt{15}\right)\cdot\left(8-\sqrt{15}\right)}=16-2\cdot\sqrt{8^2-\left(\sqrt{15}\right)^2}=$$
$$=16-2\cdot\sqrt{64-15}=16-14=2.$$



Feladatok

1. Végezzük el a következő műveleteket!

a) $\dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$; *b)* $\sqrt{50}\cdot\sqrt{2}$; *c)* $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$; *d)* $\sqrt{5^3}\cdot\sqrt{5}$;

e) $\dfrac{\sqrt{5^3}}{\sqrt{5}}$; *f)* $\left(\sqrt{7}\right)^3\cdot\sqrt{7}$; *g)* $\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{32}-\sqrt{8}\right)$; *h)* $\dfrac{\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{6}+\sqrt{24}\right)}{\sqrt{2}}$.

2. Melyik szám a nagyobb:

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}$ vagy $\dfrac{\sqrt{28}}{\sqrt{2}}$; *b)* $\left(\sqrt{3}\right)^3$ vagy $\sqrt{14}\cdot\sqrt{2}$;

c) $\dfrac{\sqrt{2^5}}{\sqrt{8}}$ vagy $\sqrt{6}\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{10}}$; *d)* $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{12}}\cdot\dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{2}}$ vagy $\dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^3}{\sqrt{15}}\cdot\dfrac{\sqrt{35}}{\sqrt{6}}$?

3. Végezzük el a következő műveleteket!

a) $\left(2\cdot\sqrt{3}+1\right)\cdot\left(3-4\cdot\sqrt{3}\right)$; *b)* $\left(\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{2}-1\right)\cdot\left(3\cdot\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$;

c) $\left(2\cdot\sqrt{5}-3\cdot\sqrt{2}\right)^2$; *d)* $\left(3\cdot\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)^2$;

e) $\left(3\cdot\sqrt{5}+2\cdot\sqrt{3}\right)\cdot\left(3\cdot\sqrt{5}-2\cdot\sqrt{3}\right)$; *f)* $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^3$.

4. Számítsuk ki a következő kifejezések értékét!

a) $\sqrt{\sqrt{13}+3}\cdot\sqrt{\sqrt{13}-3}$;

b) $\sqrt{\sqrt{61}-5}\cdot\sqrt{\sqrt{61}+5}$;

c) $\left(\sqrt{7+\sqrt{13}}+\sqrt{7-\sqrt{13}}\right)^2$;

d) $\left(\sqrt{6-\sqrt{11}}+\sqrt{6+\sqrt{11}}\right)^2$;

e) $\left(\sqrt{10-\sqrt{19}}+\sqrt{10+\sqrt{19}}\right)^2$;

f) $\left(\sqrt{\sqrt{30}+\sqrt{14}}-\sqrt{\sqrt{30}-\sqrt{14}}\right)^2$.

Rejtvény

Melyik szám a nagyobb: $\sqrt{3\cdot\sqrt{2\cdot\sqrt{2}}}$ **vagy** $\sqrt{3\cdot\sqrt{3}}$ **?**

A másodfokú egyenlet

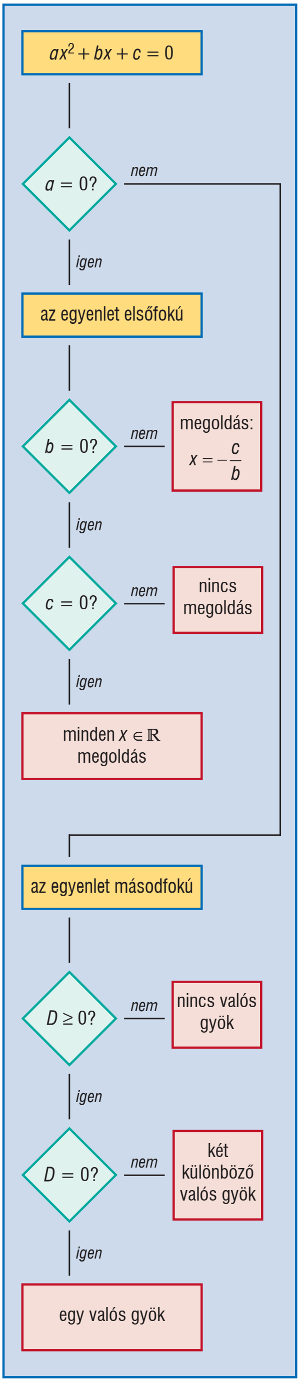
A matematikatörténet egyenletekkel foglalkozó fejezete tele van regénybe illő pillanatokkal. A merész és előremutató gondolatok nem minden esetben nyerték el a kortársak elismerését.

A görög Hippaszoszt tengerbe vetették újszerű gondolataiért.

A 16. század matematikusai versenyre hívták ki egymást. Ezek dicsőséget vagy szégyent hoztak a vetélkedőknek, de mindenképpen a tudomány fejlődését szolgálták.

1832. május 30. hajnalán Évariste Galois, a 20 éves francia forradalmár, egy hölgy becsületéért vívott párbajban haslövést kapott. Előző éjszaka vetette papírra azon gondolatait, melyek a magasabb fokú egyenletek megoldhatóságának kérdéseiben új fejezetet nyitottak a matematikában.

6. Paraméteres másodfokú egyenletek (emelt szintű tananyag)



Így működik a másodfokú egyenletet megoldó számítógépes program.

Az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenletről az együtthatók ismeretében a következőt állíthatjuk:

(1) Ha mindegyik együttható nulla, azaz $a = b = c = 0$, akkor az egyenlőség bármely valós szám esetén teljesül, hiszen a bal oldal x-től függetlenül mindig nulla.

(2) Ha $a = b = 0$ és $c \neq 0$, akkor nincs megoldása, hiszen a bal oldal x-től függetlenül mindig nullától különböző valós szám.

(3) Ha $a = 0$ és $b \neq 0$, akkor az egyenlet elsőfokú, amelynek egy megoldása van, mégpedig az $x = -\frac{c}{b}$.

(4) Ha $a \neq 0$, akkor másodfokú egyenletet kapunk, melynek megoldásai a $D = b^2 - 4ac$ diszkrimináns értékétől függenek. Ha $D > 0$, akkor két különböző valós gyök létezik, ha $D = 0$, akkor egy valós gyöke van az egyenletnek, ha $D < 0$, akkor pedig nincs megoldása az egyenletnek a valós számok körében.

Ha a megoldandó egyenletben az együtthatók konkrét értékét nem ismerjük, hanem betűvel jelöljük, *paraméteres egyenletről* beszélünk.

A paraméteres egyenletek megoldásánál minden esetre kiterjedő vizsgálatokat kell végeznünk, a fentebb említett feltételek szerint.

1. példa

Az $x^2 + 4ax + 2a^2 + 3a - 1 = 0$ egyenlet gyökei az a paraméter mely értékénél lesznek egyenlők?

Megoldás

A feladat feltételét a diszkrimináns vizsgálatával dönthetjük el, hiszen akkor kapunk egyenlő gyököket, ha a diszkrimináns értéke 0.

Mivel a diszkrimináns:

$$D = (4a)^2 - 4(2a^2 + 3a - 1) = 8a^2 - 12a + 4,$$

ezért a $8a^2 - 12a + 4 = 0$ másodfokú egyenletet megoldva, a-ra a következő két érték adódik:

$$a_1 = 1 \quad \text{és} \quad a_2 = \frac{1}{2}.$$

Azaz $a_1 = 1$ és $a_2 = \frac{1}{2}$ esetén lesznek a gyökök egyenlők. Megfigyelhetjük, hogy ezekben az esetekben az egyenlet bal oldala teljes négyzet lesz, a parabola érinti az x tengelyt:

$$a_1 = 1 \quad \text{esetén} \quad x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2;$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \quad \text{esetén} \quad x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2.$$

2. példa

Oldjuk meg a következő egyenletet (a valós paraméter)!

$$ax^2 + (2a + 1)x + a + 2 = 0.$$

Megoldás

Először is vizsgáljuk meg, milyen esetek fordulhatnak elő!

Ha $a = 0$, akkor az egyenletünk elsőfokú lesz, melyet megoldva:

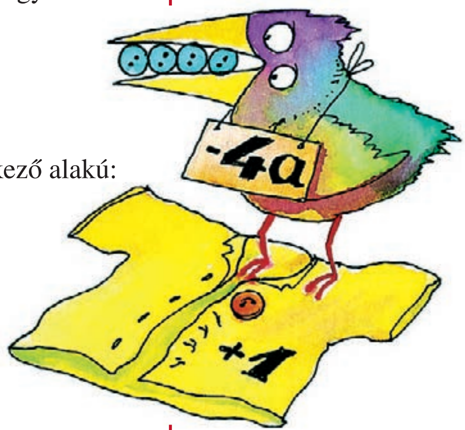
$$x + 2 = 0,$$
$$x = -2.$$

Ha $a \neq 0$, akkor az egyenlet másodfokú, és a gyökök száma a diszkriminánstól függ:

$$D = (2a + 1)^2 - 4a(a + 2) = -4a + 1.$$

- Ha $-4a + 1 > 0$, azaz $a < \frac{1}{4}$, akkor az egyenlet két valós gyöke:

$$x_{1,2} = \frac{-2a - 1 \pm \sqrt{-4a + 1}}{2a}.$$



- Ha $-4a + 1 = 0$, azaz $a = \frac{1}{4}$, akkor az egyenlet a következő alakú:

$$\frac{1}{4} \cdot x^2 + \left(2 \cdot \frac{1}{4} + 1\right)x + \frac{1}{4} + 2 = 0,$$
$$\frac{1}{4} \cdot x^2 + \frac{3}{2} \cdot x + \frac{9}{4} = 0,$$
$$\left(\frac{x}{2} + \frac{3}{2}\right)^2 = 0.$$

  Azaz ebben az esetben az egyenlet bal oldala teljes négyzetté alakítható, és csak egy megoldása létezik, mégpedig az $x = -3$.

- Ha $-4a + 1 < 0$, azaz $a > \frac{1}{4}$, akkor az egyenletnek a valós számok körében nem lesz megoldása.

Észrevehetjük, hogy a Viète-féle formulák nem adnak arról információt, hogy a valós gyökök egyáltalán léteznek-e vagy sem, hiszen:

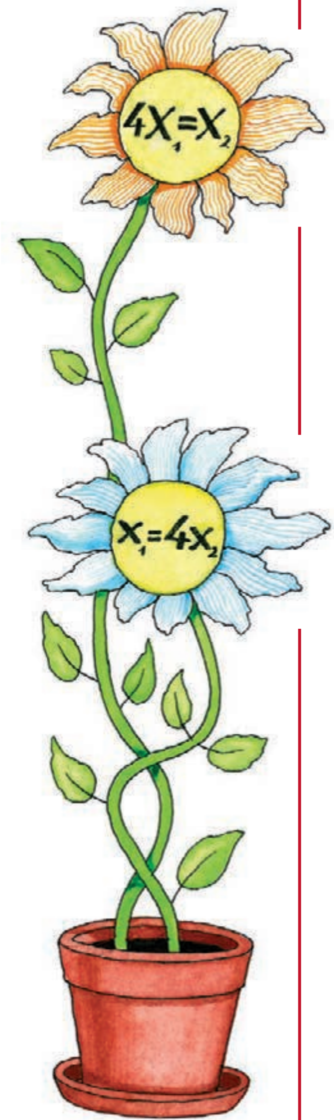
$$x_1 + x_2 = -\frac{2a + 1}{a} \quad \text{és} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{a + 2}{a}$$

értékeit mindig ki tudjuk számítani, ha az $a \neq 0$ feltétel teljesül, akkor is, amikor az egyenletnek nincsenek valós gyökei.

Ez azt jelenti, hogy **a paraméteres egyenletek megoldásánál mindig meg kell győződnünk az egyenlet diszkriminánsa alapján arról, hogy egyáltalán van-e valós gyöke az egyenletnek.**

3. példa

A p, q milyen egyjegyű pozitív egész értékeire lesz az $x^2 + px + q = 0$ egyenlet egyik gyöke a másik gyök négyszerese?



Megoldás

Az egyenlet gyökei:

$$x_1 = \frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2} \quad \text{és} \quad x_2 = \frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}.$$

A gyökökre vonatkozó feltételek alapján felírhatjuk, hogy:

$$4\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2} = \frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}.$$

Ezt átrendezve, és egyszerűbb alakra hozva:

$$-4p-4\cdot\sqrt{p^2-4q} = -p+\sqrt{p^2-4q},$$
$$-3p = 5\cdot\sqrt{p^2-4q}.$$

A kapott egyenletben a bal oldal mindig negatív, a jobb oldal viszont nemnegatív szám, így nem lesznek olyan pozitív p és q paraméterek, amelyek eleget tennének ennek az egyenletnek.

A gyökökre vonatkozó feltételek azonban másként is teljesülhetnek:

$$4\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2} = \frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}.$$

Ezt átrendezve, majd egyszerűbb alakra hozva:

$$-4p+4\cdot\sqrt{p^2-4q} = -p-\sqrt{p^2-4q},$$
$$3p = 5\cdot\sqrt{p^2-4q}.$$

Az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve:

$$9p^2 = 25p^2 - 100q,$$
$$100q = 16p^2,$$
$$p^2 = \frac{25}{4}q.$$

Mivel a megoldásokat a pozitív egyjegyű egész számok körében keressük, ezért q csak 4-gyel osztható lehet. Azaz $q = 4$ vagy $q = 8$.

Könnyen meggyőződhetünk róla, hogy csak az első esetben, $q = 4$-nél kaphatunk egész megoldást p-re, ekkor $p = 5$.

A feladat feltételeinek megfelelő egyenlet tehát az $x^2 + 5x + 4 = 0$. Az egyenletet megoldva, a két gyök:

$$x_1 = -1 \quad \text{és} \quad x_2 = -4.$$

Az egyik gyök valóban a másik 4-szerese lesz.

4. példa

Határozzuk meg az m paraméter értékét úgy, hogy a következő másodfokú kifejezés értéke bármely x esetén negatív legyen!

$$mx^2 + (m-1)x + m - 1.$$

Megoldás

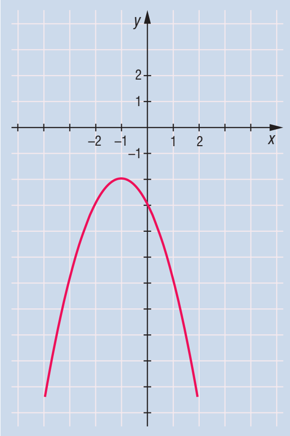
A feladat feltételét a következőképpen fogalmazhatjuk át. Az m paraméter értékét úgy kell megadnunk, hogy a felírt kifejezés

(1) másodfokú maradjon,

(2) a parabola lefelé nyíló legyen,

(3) az általa meghatározott $mx^2 + (m-1)x + m - 1 = 0$ másodfokú egyenletnek ne legyen megoldása.

Ezek a feltételek azt jelentik, hogy a kifejezés által meghatározott függvény grafikonja egy olyan lefelé nyíló parabola, mely nem metszi a koordináta-rendszer x tengelyét. ***(8. ábra)***



8. ábra

Az (1) és (2) feltételt az $m < 0$ biztosítja.

A (3) akkor teljesül, ha az egyenlet diszkriminánsa negatív lesz, azaz:

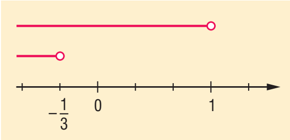
$$(m-1)^2 - 4m(m-1) < 0,$$
$$(m-1)\cdot(m-1-4m) < 0,$$
$$(m-1)\cdot(-3m-1) < 0.$$

A szorzat akkor negatív, ha a két tényező ellentétes előjelű. Azaz:

$$m - 1 < 0 \text{ és } -3m - 1 > 0, \text{ vagy}$$
$$m - 1 > 0 \text{ és } -3m - 1 < 0.$$

Az első esetben

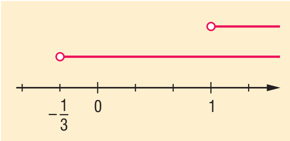
$$m < 1 \text{ és } m < -\frac{1}{3}, \text{ azaz } m < -\frac{1}{3},$$ ***(9. ábra)***



9. ábra

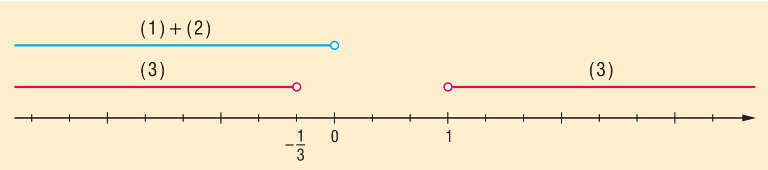
a második esetben

$$m > 1 \text{ és } m > -\frac{1}{3}, \text{ azaz } m > 1.$$ ***(10. ábra)***



10. ábra

Az (1), (2) és (3) feltételt ábrázolva:



11. ábra

A mindhárom feltételt egyszerre kielégítő m paraméterek halmaza:

$$\left\{m \mid m \in \mathbb{R} \text{ és } m < -\frac{1}{3}\right\}.$$

5. példa

Adjuk meg az m paraméter értékét úgy, hogy a következő egyenlőtlenségnek ne legyen megoldása!

$$(m+1)x^2-2(m-1)x+3m-3<0.$$

Megoldás

Fogalmazzuk át a feltételt! Ha a felírt egyenlőtlenségnek nincs megoldása, az azt jelenti, hogy az

$$(m+1)x^2-2(m-1)x+3m-3\ge 0$$

egyenlőtlenség minden valós x-re teljesül. Vizsgáljuk meg, hogy ez milyen feltételek esetén igaz!

Mivel $m+1=0$ esetén a bal oldal függvénye az $x\mapsto 4x-6$ lineáris függvény lesz, amely nem lesz minden x-re pozitív, ezért m-re teljesülnie kell, hogy $m\ne -1$.

Ekkor a bal oldal egy másodfokú függvény lesz, amely abban az esetben lesz minden x-re nemnegatív, ha a függvény képe felfelé nyíló parabola, melynek legfeljebb egy közös pontja lehet az x tengellyel.

Azaz $m+1>0$, vagyis $m>-1$.

Másrészt legfeljebb egy valós gyöke létezhet, melyet a diszkrimináns értéke határoz meg. Erre teljesülnie kell, hogy

$$D=[2(m-1)]^2-4(m+1)\cdot(3m-3)\le 0.$$

Ez m-re nézve egy másodfokú egyenlőtlenséget határoz meg.

A kijelölt műveleteket elvégezve, és rendezve:

$$4m^2-8m+4-12m^2-12m+12m+12\le 0,$$
$$-8m^2-8m+16\le 0.$$

Az egyenlőtlenség mindkét oldalát –8-cal osztva:

$$m^2+m-2\ge 0.$$

Határozzuk meg az $m^2+m-2=0$ egyenlet zérushelyeit!

$$m_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2}=\begin{cases} m_1=-2,\\ m_2=1.\end{cases}$$

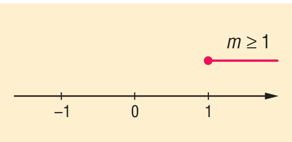
Mivel az $m^2+m-2\ge 0$ egyenlőtlenség bal oldalán álló kifejezés grafikonja felfelé nyíló parabola, ezért az egyenlőtlenség megoldása:

$$m\le -2 \text{ vagy } 1\le m.$$

Figyelembe véve még a korábban kapott $m>-1$ feltételt, a feladatban szereplő másodfokú egyenlőtlenségnek akkor nem lesz megoldása, ha

$$m\in [1;\infty[.$$

A megoldás számegyenesen szemléltetve a 12. ábrán látható.



12. ábra

Feladatok

1. Határozzuk meg a következő egyenletekben az a paraméter értékét úgy, hogy az egyenletnek kétszeres gyökei legyenek!

a) $x^2 - ax + 4 = 0$; *b)* $x^2 - 3x + a = 0$;

c) $x^2 - ax + a = 0$; *d)* $x^2 - ax + a + 1 = 0$.

2. Oldjuk meg, és diszkutáljuk (elemezzük) a következő egyenleteket!

a) $x^2 - ax + 4 = 0$; *b)* $x^2 - bx + a = 0$;

c) $ax^2 - bx + 5 = 0$; *d)* $ax^2 - bx + a + 1 = 0$.

3. Oldjuk meg a következő egyenleteket!

a) $\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x} = 2$; *b)* $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x+a} = 2$;

c) $\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x-a} = \frac{1}{x}$.

4. Határozzuk meg az a paraméter értékét úgy, hogy a következő egyenleteknek ne legyen valós megoldása!

a) $x^2 - ax + 4a = 0$; *b)* $x^2 - ax + a - 4 = 0$;

c) $ax^2 - (a - 1)x + 5 = 0$.

5. Határozzuk meg az m paraméter értékét úgy, hogy az $mx^2 + (m - 1)x + 1$ kifejezés értéke bármely x esetén negatív legyen!

6. Határozzuk meg az m paraméter értékét úgy, hogy az $mx^2 + mx - 5$ kifejezés értéke bármely x esetén pozitív legyen!

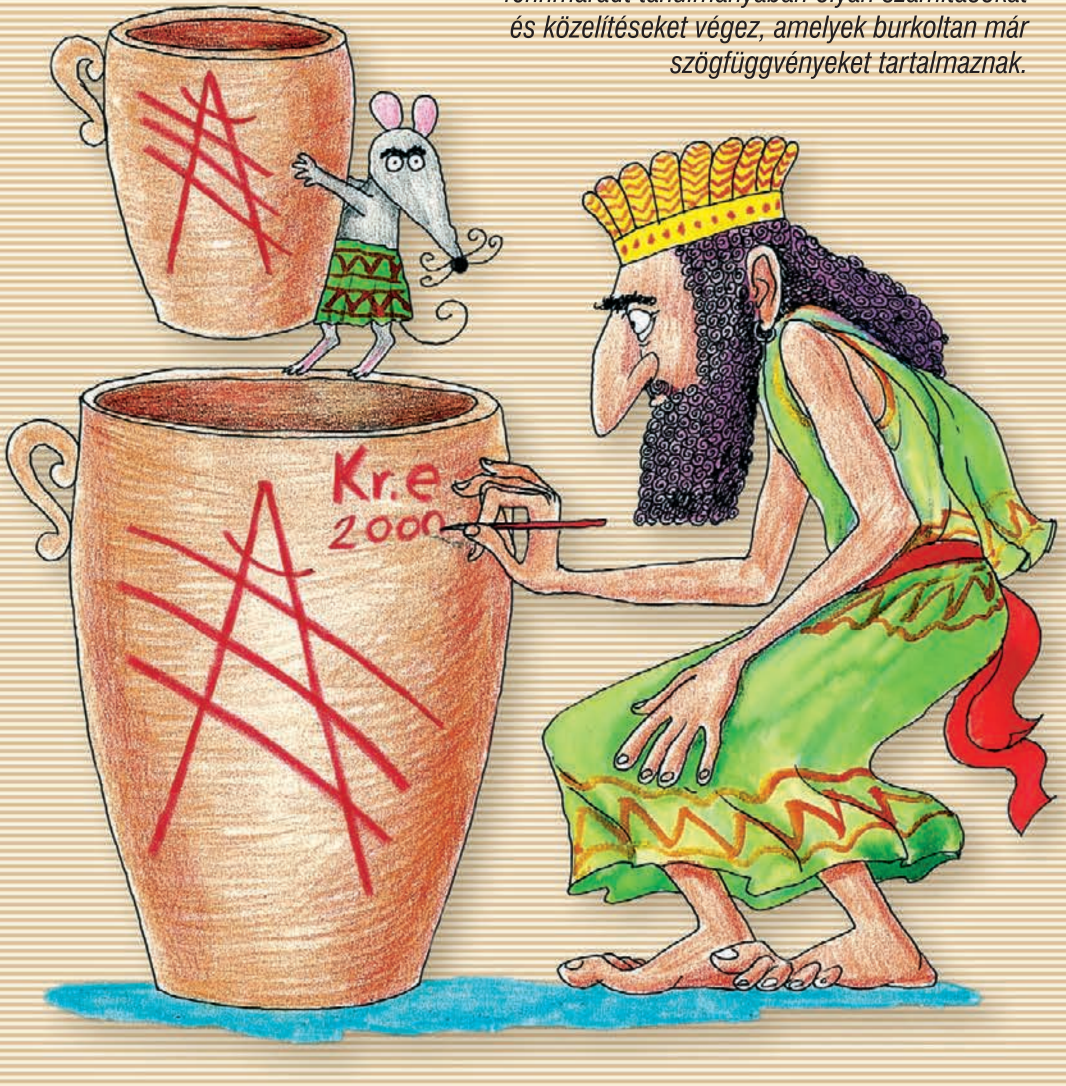
7. Határozzuk meg az m paraméter értékét úgy, hogy az $-mx^2 + (m - 1)x + m + 2$ kifejezés értéke bármely x esetén negatív legyen!

Geometria

1936-ban, a mai Irán területén található Szúza környéki ásatások során előkerült agyagcserepek alapján úgy tűnik, hogy kb. 4000 évvel ezelőtt a babilóniaiak már alkalmazták a párhuzamos szelők tételét és a hasonlóság fogalmát.

A Kr. e. 5. században a khioszi Hippokratész bizonyításai során felhasználta a kör kerületi és középponti szögének kapcsolatát, a hasonlóságot, és meg tudta szerkeszteni két szakasz mértani közepét.

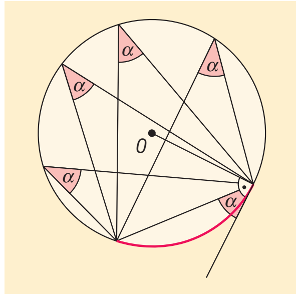
A szamoszi Arisztarkhosz a Kr. e. 3. században „A Nap és a Hold méreteiről és távolságáról'' című egyetlen fennmaradt tanulmányában olyan számításokat és közelítéseket végez, amelyek burkoltan már szögfüggvényeket tartalmaznak.



3. A kerületi szögek tétele; látószögkörív

Az előző leckében bebizonyítottuk, hogy adott körben adott ívhez tartozó középponti szög kétszerese az ugyanazon ívhez tartozó kerületi szögnek. Adott ívhez egyetlen középponti szög és végtelen sok kerületi szög tartozik, így a középponti és kerületi szögek tételének közvetlen következménye a következő tétel:

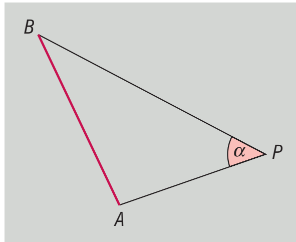
KERÜLETI SZÖGEK TÉTELE: **Adott kör adott ívéhez tartozó kerületi szögek egyenlő nagyságúak.** *(10. ábra)*



10. ábra

Természetesen a középponti és kerületi szögek tételéhez hasonlóan ezt a tételt is megfogalmazhatjuk általánosabban:

TÉTEL: **Egyenlő sugarú körökben az azonos hosszúságú ívekhez tartozó kerületi szögek egyenlő nagyságúak.**



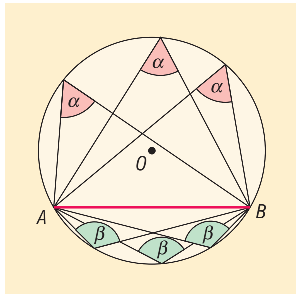
11. ábra

látószög

A kerületi szögek tétele a ***látószög*** fogalmának bevezetésével is megfogalmazható. Tekintsünk a síkon egy AB szakaszt és egy P pontot! Legyen $APB\sphericalangle = \alpha$! Ekkor azt mondjuk, hogy **a P pontból az AB szakasz α szög alatt látszik.** *(11. ábra)*

A kerületi szögek tétele a látószög fogalmával:

TÉTEL: **Egy adott kör adott AB húrja az AB ív (belső) pontjaiból ugyanakkora szög alatt látszik.** *(12. ábra)*



12. ábra

Ez a megfogalmazás természetesen úgy értendő, hogy csak az egyik AB ívet tekintjük. Az állítás mindkét ívre igaz külön-külön, a megfelelő látószögek viszont általában nem egyeznek meg. Speciálisan, ha a tekintett húr a kör átmérője, akkor mindkét ívre ugyanaz a látószög, nevezetesen 90º. Ez alapján Thalész tétele látószöggel megfogalmazva:

TÉTEL: **Az AB átmérőjű kör A-tól és B-től különböző pontjaiból az AB átmérő derékszög alatt látszik.**

Mivel Thalész tételének igaz a megfordítása is, ezért bármely olyan pont, amelyből az AB szakasz 90º-os szög alatt látszik, illeszkedik az AB átmérőjű körre. Ez tehát azt jelenti, hogy az AB átmérőjű kör pontjain kívül nincs más olyan pont, amelyből az AB szakasz derékszögben látszana.

Ezek alapján Thalész tételét és a megfordítását összevonva a korábbiakhoz képest másként is megfogalmazhatjuk:

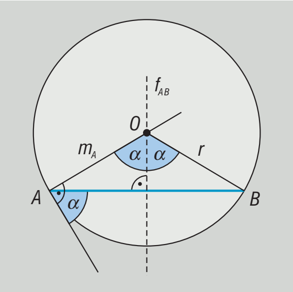
Thalész tétele és megfordítása

TÉTEL: **Azon pontok halmaza a síkon, amelyekből a sík egy AB szakasza derékszögben látszik, az AB átmérőjű kör, kivéve az A és a B pontot.**

Ezek után természetesen vetődik fel a kérdés, hogy adott AB szakasz és konvex α szög esetén mi lesz azon pontok halmaza az AB szakaszt tartalmazó síkban, amelyekből a szakasz α szög alatt látszik.

1. példa

Legyen adott az AB szakasz és egy α szög ($\alpha < 180^o$)! Szerkesszünk olyan kört, amelynek az adott szakasz húrja, és a kör valamelyik AB ívének pontjaiból az AB szakasz α szög alatt látszik!



13. ábra

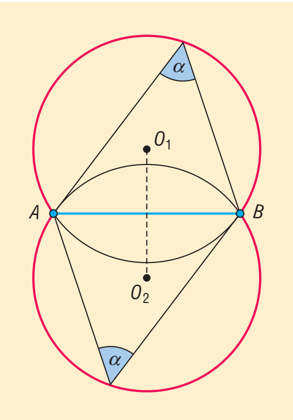
Megoldás

A középponti és kerületi szögek tétele alapján a cél olyan kör szerkesztése, amelynek az AB szakasz húrja, és az AB húrhoz tartozó középponti szög 2α. Ezen kör egyik AB ívének belső pontjai megfelelnek a feladat feltételének. A keresett kör középpontja illeszkedni fog egyrészt az AB szakasz felező merőlegesére, másrészt a kerületi szögek tétele alapján az A csúcsú, α nagyságú érintőszárú kerületi szög érintő szárára A-ban emelt merőleges egyenesre, az érintési pontba húzott sugár egyenesére. ***(13. ábra)***

látószögkörív

A szerkesztés menete:

1. Az AB szakaszra egyik végpontjában (mondjuk A-ban) felvesszük az α szöget.
2. A kapott szögszárra A-ban merőlegest állítunk $\rightarrow m_A$.
3. Megszerkesztjük az AB szakasz felező merőlegesét $\rightarrow f_{AB}$.
4. $m_A \cap f_{AB} = O$ a keresett kör középpontja.

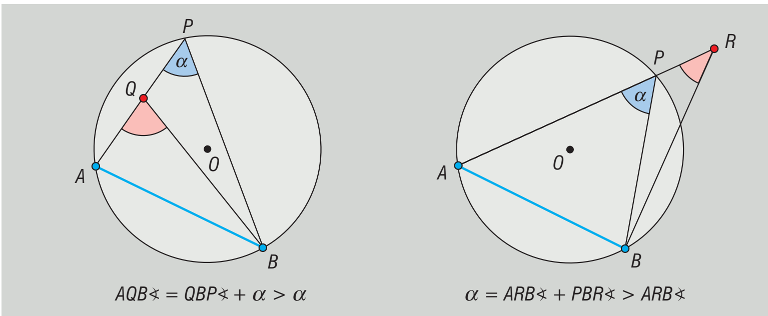


14. ábra

Mivel az A csúcsú, α nagyságú érintő szárú kerületi szöget az AB egyenes mindkét oldalára felmérhetjük, ezért két megfelelő körívet kapunk, amelyek az AB egyenesre szimmetrikusan helyezkednek el ***(14. ábra)***. A kapott nyílt (a végpontokat nem tartalmazó) körívek az AB szakasz α szögű két ***látószögkörívei (látókörívei).***

Az 1. példa megoldása után meg kell vizsgálnunk, hogy a látószögkörívek pontjain kívül van-e még más síkbeli pont, ahonnan az AB szakasz α szög alatt látszik. A 15. ábra alapján látható, hogy a látószög a köríven belüli pontokból nagyobb, míg a köríven kívüli pontokból kisebb, mint α.

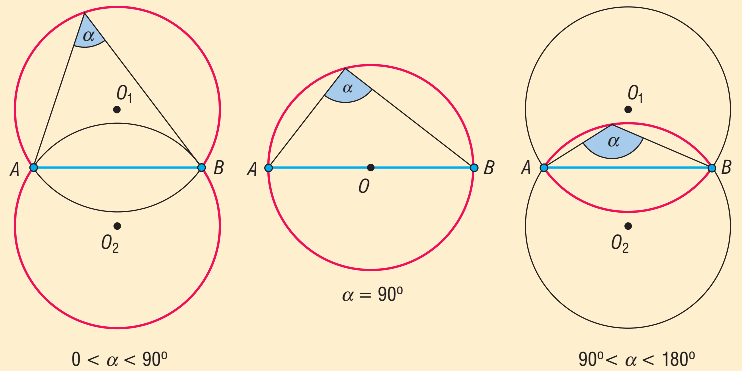
15. ábra



A kerületi szögek tételének következményeként bebizonyítottuk a következő tételt:

TÉTEL: **Azon pontok halmaza a síkon, amelyekből a sík egy adott AB szakasza adott α ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$) szög alatt látszik: két, az AB egyenesre szimmetrikusan elhelyezkedő nyílt körív.**

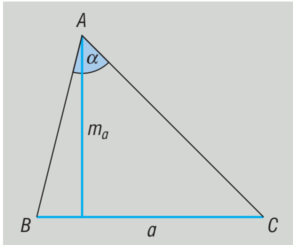
A 16. ábrán a látószögkörívek alakja látható α nagyságától függően.



16. ábra

2. példa

Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy oldala, a vele szemközti szög és az adott oldalhoz tartozó magasság!



17. ábra

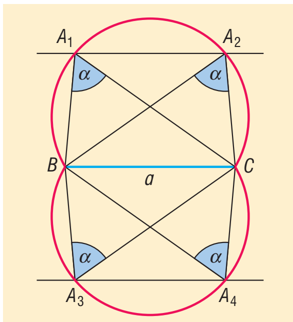
Megoldás

Adott a $BC = a$ oldal, az α szög és m_a. ***(17. ábra)***

A BC oldal A-ból adott α szög alatt látszik, ezért A illeszkedik a BC szakasz α szögű látószögköríveinek valamelyikére.

A a BC egyenestől m_a távolságra van, ezért illeszkednie kell a BC egyenessel párhuzamos, tőle m_a távolságra felvett két egyenes egyikére is.

A háromszög harmadik csúcsának megfelelő pontokat tehát a szerkeszthető látószögkörívek és a szintén szerkeszthető, BC-től m_a távolságra haladó párhuzamos egyenesek metszéspontjaiként kapjuk. ***(18. ábra)***



18. ábra

A-ra adódhat 4, 2 vagy 0 megoldás, attól függően, hogy a párhuzamos egyeneseknek és a köríveknek hány közös pontjuk van.

A kapott háromszög viszont – egybevágóság erejéig – egyértelműen meghatározott.

Feladatok

1. Vegyünk fel egy szakaszt! Szerkesszük meg azon pontok halmazát, amelyekből a szakasz *a)* 45º-os; *b)* 60º-os; *c)* 90º-os; *d)* 120º-os; *e)* α szög alatt látszik!

2. Egy háromszög szögeinek nagysága *a)* 30º, 60º, 90º; *b)* 40º, 60º, 80º; *c)* 36º, 58º, 86º; *d)* α, β, γ.
   Mekkora szöget zárnak be az oldalegyenesekkel a háromszög körülírt körének a csúcsokba húzott érintői? Számítsuk ki az érintők által meghatározott háromszög szögeit!

3. Helyezzünk el egy körben egy olyan húrt, amelynek hossza megegyezik a kör sugarával! Mekkora szögben látszik ez a húr a körvonal pontjaiból?

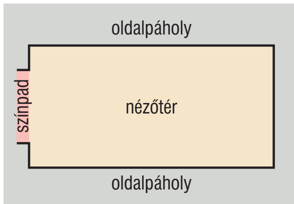
4. Egy pontból a körhöz húzott két érintő 76º-os szöget zár be. Mekkora szögben látszik a körvonal pontjaiból az érintési pontokat összekötő húr?

5. Vegyünk fel egy egyenest, rajta kívül két pontot és egy konvex szöget! Szerkesszünk az egyenesen olyan pontot, amelyből az adott pontok által meghatározott szakasz α szög alatt látszik!

6. Szerkesszünk egy derékszögű háromszög belsejében olyan pontot, amelyből a két befogó mindegyike 120º-os szög alatt látszik! Mekkora szögben látszik ebből a pontból az átfogó?

7. Szerkesszünk háromszöget, ha adott egy oldalának és a hozzá tartozó súlyvonalnak a hossza, valamint az adott oldallal szemközti szögének nagysága!

8. Az ábrán egy színház nézőtere látható felülnézetből. A nézőtér hosszabbik oldalán földszinti oldalpáholyok találhatók. Keressük meg azt az oldalpáholyt (a nézőtér hosszabb oldalának azon pontját), ahonnan a színpad a legnagyobb szög alatt látszik!



Rejtvény

Adott egy 4 cm sugarú kör a középpontja nélkül, és egy olyan egyenlő szárú derékszög alakú vonalzó, amelynek a befogója 20 cm hosszú. Keressük meg az adott vonalzó és ceruza segítségével az adott kör középpontját. (A vonalzón és ceruzán kívül más nem használható.)