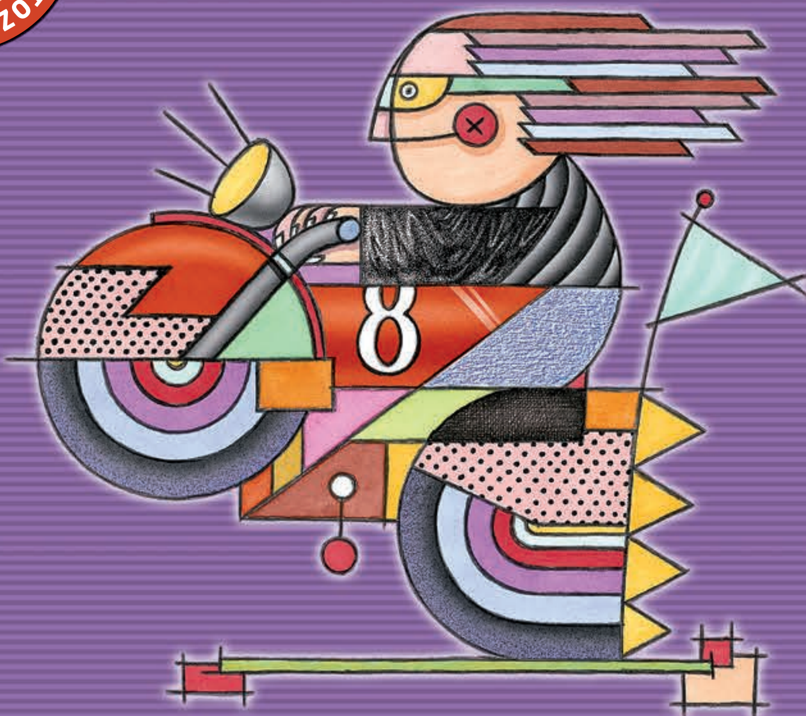
Jakab Tamás
Kothencz Jánosné
Kozmáné Jakab Ágnes
Pintér Klára
Vincze István

sokszínű

Matematika

8

Digitális változatban is elérhető
Aktiváló kóddal



MOZAIK
www.mozaik.info.hu

Jakab Tamás
Kothencz Jánosné
Kozmáné Jakab Ágnes
Pintér Klára
Vincze István

Matematika

tankönyv

8

Tizedik, változatlan kiadás

Mozaik Kiadó – Szeged, 2019

A tankönyv fejezetei

Algebra 1

Szöveges feladatok 2

Halmazok, kombinatorika 3

Geometria I. 4

Térgeometria 5

Statisztika, valószínűség 6

Geometria II. 7

Függvények, sorozatok 8

Tartalomjegyzék

Algebra

1. Algebrai kifejezések (emlékeztető) 10
2. Hogyan oldunk meg egyenleteket, egyenlőtlenségeket? 16
3. Többtagú algebrai kifejezések szorzása 22
4. Összeg, különbség négyzete (kiegészítő anyag) 27
5. Összeg és különbség szorzata (kiegészítő anyag) 33
6. Kiemelés, szorzattá alakítás 36
7. Algebrai törtek (kiegészítő anyag) 40
8. Egyenletek megoldása szorzattá alakítással 45
9. Vegyes feladatok 49

Szöveges feladatok

1. Egyenletek alkalmazása feladatmegoldásban (emlékeztető) 52
2. Hány éves a kapitány? 57
3. Gondoltam egy számra... 62
4. Fogócska matematikus szemmel 66
5. Méregkeverés – egyenletekkel 71
6. A fénymásolástól a fűnyírásig: együttes munkavégzés 74
7. Szögek, oldalak, átlók: geometriai számítások 78
8. Vegyes feladatok 83

Halmazok, kombinatorika

1. Halmazok 86
2. Beszéljünk helyesen a matematika nyelvén! 93
3. Hányféle útvonal lehet? Az összegzési módszer 98
4. Hányféleképpen választhatunk? 103
5. Válasszuk szét az eseteket! 110
6. Hány lehetőség van? 114
7. Vegyes feladatok 117

Geometria I.

1. A terület 120
2. A négyzetgyökvonás 126
3. Pitagorasz tétele 133
4. A Pitagorasz-tétel alkalmazásai 138
5. Vegyes feladatok 143

Térgeometria

1. A testek csoportosítása. Kúp, gúla 146
2. Nézzük több oldalról! 152
3. Csúcsok, élek, lapok 156
4. Testek hálója 161
5. Testek felszíne 166
6. A gúla felszíne (kiegészítő anyag) 172
7. Testek térfogata 176
8. A gúla térfogata (kiegészítő anyag) 181
9. Testek felszíne és térfogata 186
10. A kúp és a gömb felszíne, térfogata (kiegészítő anyag) 190
11. Vegyes feladatok 193

Statisztika, valószínűség

1. Adatok elemzése 196
2. Mennyi a valószínűsége? 205

Geometria II.

1. Az eltolás 216
2. A vektorok 222
3. A párhuzamos eltolás alkalmazása, szerkesztések 226
4. Egybevágósági transzformációk 231
5. A középpontos hasonlóság 239
6. Vegyes feladatok 245

Függvények, sorozatok

1. Függvények, lineáris függvények 248
2. Függvények tulajdonságai 255
3. Az abszolútérték-függvény 259
4. Másodfokú függvények 265
5. Egyéb függvények (kiegészítő anyag) 270
6. Sorozatok, számtani sorozat 276
7. Mértani sorozatok 281
8. Vegyes feladatok 287

Az új szakszavak jegyzéke 290

Útmutató a könyv használatához

A könyv jelrendszere és kiemelései segítenek a tananyag elsajátításában. A leckék általában kidolgozott példákkal kezdődnek. Ezek gondolatmenetét érdemes alaposan elemezni és megérteni, mert mintát nyújtanak a további feladatok megoldásához is.

A megtanulandó legfontosabb szabályokat és meghatározásokat a könyv zöld aláfestéssel és vastag betűs kiemeléssel jelzi.

A *-gal jelölt gyakorló feladatok megoldásához a tananyag mélyebb ismerete szükséges, az egyes leckék végén található rejtvények pedig sokszor egy-egy ügyes ötlettel, egyéni látásmóddal oldhatók meg.

A lapszélen olvasható apró betűs információk többféle szerepet is betölthetnek. Lehetnek például

- fontos kiegészítések, emlékeztetők, amelyek segítenek a mintapéldák megértéséhez szükséges ismereteket felidézni;
- érdekességek, amelyek bemutatják, hogyan alkalmazható a matematika az élet legkülönbözőbb területein;
- beszélgetésre, végiggondolásra, kutatásra érdemes kérdések is.

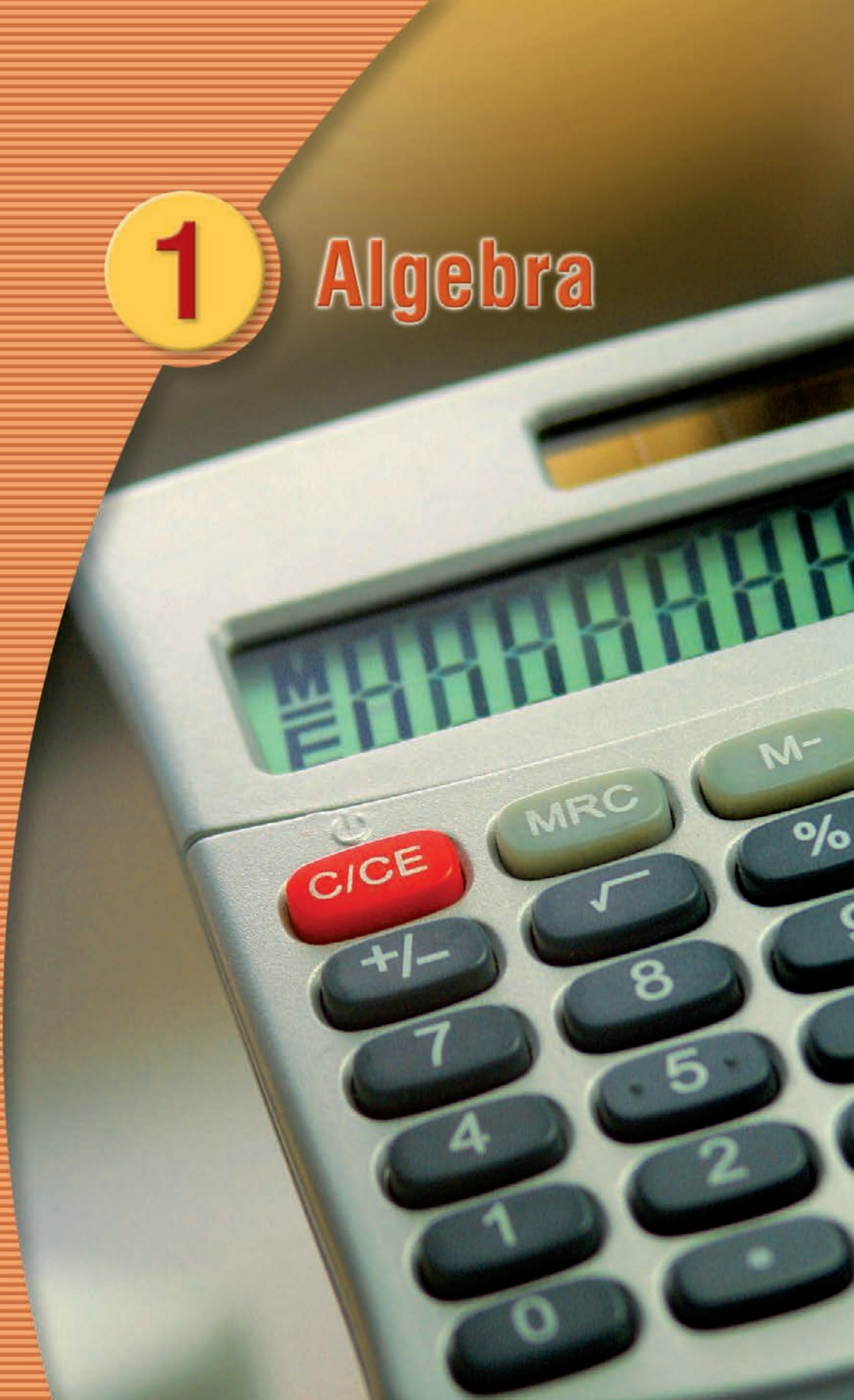
A tankönyv számos matematikai játék leírását tartalmazza. Ezek kipróbálását akár a tanórán, akár azon kívül mindenképpen ajánljuk, mert sok tanulsággal szolgálhatnak, és a matematikai gondolkodásmódot is fejlesztik.

A tankönyv mellett feltétlenül javasoljuk a hozzá kapcsolódó munkafüzet használatát. Ez főként azokból a feladatokból nyújt válogatást, amelyek megértését kifejezetten segíti és gyorsítja a részletesebb, lépésekre bontott feldolgozás.

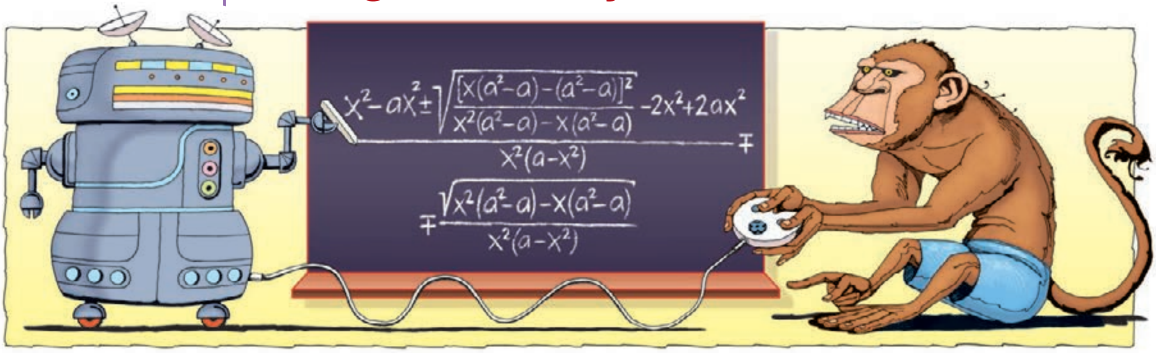
A könyv valamennyi felhasználójának őszintén kívánjuk, hogy a matematika felfedezése örömteli szellemi kalandot jelentsen a számára.

a Szerzők

1 Algebra



1. Algebrai kifejezések (emlékeztető)



Általános matematikai összefüggések felírásakor, számítógépes programok írásakor algebrai kifejezéseket alkotunk. Ezekben számokat és betűket műveleti jelekkel és zárójelekkel kapcsolunk össze. A betűk helyébe az adott alaphalmazba eső számokat helyettesíthetjük.

1. példa

Egy család, két felnőtt és két gyerek nyaralni indul, ezért 7 napra a TUTI biztosítónál utasbiztosítást kötnek. A biztosítás ára naponta fejenként 450 Ft.

a) Mennyibe kerül a család utasbiztosítása?

b) Peti számítógéppel számolja a különböző biztosítók ajánlatait. Táblázatba írja az adatokat, és megadja azt az algebrai kifejezést, amely alapján a program kiszámolja a biztosítást. Írjuk fel ezt az algebrai kifejezést, ha *n* napra utaznak, és a biztosítás egy főre napi *b* Ft!

c) A TUTI biztosító családi biztosítást is ajánl, amely 15% megtakarítást jelent. Számítsuk ki, és írjuk fel algebrai kifejezéssel a kedvezményes biztosítás árát!

d) Mennyibe kerülne a 4 fős család utasbiztosítása 7 napra a TÁJFUN biztosítónál, ha ott naponta egy főre 437 Ft a díj, és szintén 15%-os családi kedvezménnyel számolhatnak?

Megoldás

a) A biztosítás forintban

1 főre,	1 napra:	450;
1 főre,	7 napra:	$7 \cdot 450$;
4 főre,	7 napra:	$4 \cdot 7 \cdot 450 = 12\,600$.

Válasz: A család utasbiztosítása 7 napra 12 600 Ft-ba kerül.

b) A biztosítás forintban

1 főre,	1 napra:	b;
1 főre,	n napra:	$n \cdot b$;
4 főre,	n napra:	$4 \cdot n \cdot b$.

Válasz: A család utasbiztosítása forintban a $4 \cdot n \cdot b$ algebrai kifejezéssel számolható.

A $4 \cdot n \cdot b$ algebrai kifejezés **egytagú,** mert a szorzás az utoljára elvégzendő művelet.

A $4 \cdot n \cdot b$ algebrai kifejezésben az $n \cdot b$ együtthatója 4.

c) Írjuk fel a családi biztosítást számokkal és algebrai kifejezéssel!

	számokkal	**algebrai kifejezéssel**
A biztosítás összege	12 600	$4nb$
A kedvezmény	$0{,}15 \cdot 12\,600 = 1890$	$0{,}15 \cdot 4nb = 0{,}6nb$
A fennmaradó összeg	$12\,600 - 1890 = 10\,710$	$4nb - 0{,}6nb = 3{,}4nb$

Válasz: A kedvezményes biztosítás ára 10 710 Ft, algebrai kifejezéssel: $3{,}4 \cdot n \cdot b$ Ft.

A $4nb - 0{,}6nb$ algebrai kifejezés **többtagú,** mert a kivonás az utoljára elvégzendő művelet.

A $4nb$ és a $0{,}6nb$ algebrai kifejezések egyneműek, mert csak együtthatójukban különböznek, így különbségük együtthatója az együtthatók különbsége.

d) A TÁJFUN biztosító ajánlata csak a naponta fizetendő díjban tér el a TUTI biztosító ajánlatától, így az előbb kapott $3{,}4nb$ algebrai kifejezés alapján számolhatunk.

Itt $n = 7$ és $b = 437$, amit behelyettesítve:

$$3{,}4nb = 3{,}4 \cdot 7 \cdot 437 = 10\,400{,}6.$$

Válasz: A TÁJFUN biztosítónál 10 400 Ft-ot kell fizetnünk.

Ha az algebrai kifejezésben szereplő betűk helyébe az alaphalmazból számokat írunk, **behelyettesítést** végzünk.

3. példa

A 2009 prímtényezős felbontása: $2009 = 7^2 \cdot 41$, ami $p^2 \cdot q$ alakú, ahol p és q különböző prímszámok. Melyik a 2009 után következő első ilyen alakú évszám?

$p^2 = p \cdot p$

Megoldás

Írjuk fel a következő évszámok prímtényezős felbontását!

$2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$;

2011 prímszám;

$2012 = 2^2 \cdot 503$, ahol 503 prímszám.

Tehát a 2009 utáni első megfelelő évszám a 2012.

Keressünk hasonló szabályosságot az aktuális évszámban, és találjuk meg a következő ugyanolyan tulajdonságú évszámot!

4. példa

Keressük meg a két oszlopban az egymással egyenlő algebrai kifejezéseket!

a)	$2x + 5x$	I.	$2x^3 + 4x^2$
b)	$3x^3y$	II.	$10a^3$
c)	$5a \cdot a \cdot 2a$	III.	$\frac{7}{2}a(a + b)$
d)	$3{,}5a^2 + 3{,}5ab$	IV.	$3xy \cdot x^2$
e)	$2x(x \cdot x + 2x)$	V.	$7x$

Megoldás

Először vizsgáljuk meg, hogy melyik kifejezés esetén tudunk valamilyen műveletet elvégezni.

a) A kéttagú összegben az egynemű kifejezéseket összevonhatjuk:

$2x + 5x = 7x$;

c) a szorzatot hatvány alakba írhatjuk:

$5a \cdot a \cdot 2a = 5 \cdot 2 \cdot a \cdot a \cdot a = 10a^3$;

$a \cdot a \cdot a = a^3$

IV. az azonos alapú hatványokat összeszorozhatjuk:

$3xy \cdot x^2 = 3x \cdot x^2 \cdot y = 3x^3 \cdot y$;

$x \cdot x^2 = x^1 \cdot x^2 = x^3$

III. és *e)* esetén elvégezhetjük a beszorzást:

$\frac{7}{2}a(a+b) = 3{,}5a(a+b) = 3{,}5a \cdot a + 3{,}5a \cdot b = 3{,}5a^2 + 3{,}5ab$;

$2x(x \cdot x + 2x) = 2x(x^2 + 2x) = 2x \cdot x^2 + 2x \cdot 2x = 2x^3 + 4x^2$.

Összeg szorzásakor az összeg minden tagját szorozzuk, majd a szorzatokat összeadjuk.

Így az egyenlő algebrai kifejezések a következők:

a)	$2x + 5x$	I.	$2x^3 + 4x^2$
b)	$3x^3y$	II.	$10a^3$
c)	$5a \cdot a \cdot 2a$	III.	$\frac{7}{2}a(a+b)$
d)	$3{,}5a^2 + 3{,}5ab$	IV.	$3xy \cdot x^2$
e)	$2x(x \cdot x + 2x)$	V.	$7x$

5. példa

Végezzük el az osztásokat!

a) $\frac{10a \cdot 14a}{2}$; *b)* $\frac{9a \cdot 6b}{3}$; *c)* $\frac{10a + 14a}{2}$; *d)* $\frac{9a + 6b}{3}$.

Megoldás

a) $\frac{\overset{5}{\cancel{10}}\,a \cdot 14a}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 70a^2$ vagy $\frac{10a \cdot \overset{7}{\cancel{14}}\,a}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 70a^2$.

b) $\frac{\overset{3}{\cancel{9}}\,a \cdot 6b}{\underset{1}{\cancel{3}}} = 18ab$ vagy $\frac{9a \cdot \overset{2}{\cancel{6}}\,b}{\underset{1}{\cancel{3}}} = 18ab$.

Szorzat osztásakor csak az egyik tényezőt osztjuk az osztóval.

c) A tört számlálójában összevonhatjuk a tagokat:

$$\frac{10a+14a}{2}=\frac{24a}{2}=12a.$$

d) Az összeg minden tagját osztjuk a nevezővel, majd a hányadosokat összeadjuk:

$$\frac{9a+6b}{3}=\frac{9}{3}a+\frac{6}{3}b=3a+2b.$$

6. példa

Hozzuk egyszerűbb alakra a következő algebrai kifejezéseket!

a) $3\cdot(2x-1)+(3-x)\cdot 5$; *b)* $y\cdot(y+1)-y\cdot(y-1)$;

c) $\frac{x}{3}+\frac{x}{4}-\frac{x}{5}$; *d)* $\frac{x}{2}+\frac{x-1}{3}$; *e)* $\frac{5a-b}{6}-\frac{a-2b}{3}$.

Megoldás

a) Végezzük el a beszorzásokat, majd a lehetséges összevonásokat!

$$3\cdot(2x-1)+(3-x)\cdot 5=3\cdot 2x-3\cdot 1+3\cdot 5-x\cdot 5=$$
$$=6x-3+15-5x=6x-5x-3+15=x+12.$$

A szorzat előjelét a tényezők előjele határozza meg.

$-y\cdot(-1)=+y$

b) $y\cdot(y+1)-y\cdot(y-1)=y\cdot y+y\cdot 1-y\cdot y+y\cdot 1=$
$=y^2+y-y^2+y=y^2-y^2+y+y=2y.$

c) Hozzuk közös nevezőre a törteket!

$$\frac{x}{3}+\frac{x}{4}-\frac{x}{5}=\frac{20x}{60}+\frac{15x}{60}-\frac{12x}{60}=\frac{20x+15x-12x}{60}=\frac{23x}{60}.$$

d) Hozzuk közös nevezőre a törteket!

$$\frac{x}{2}+\frac{x-1}{3}=\frac{3x+2\cdot(x-1)}{6}=\frac{3x+2x-2}{6}=\frac{5x-2}{6}.$$

Közös nevezőre hozáskor a számlálóban levő összeget zárójelbe kell tenni!

e) Hozzuk közös nevezőre a törteket, majd végezzük el a lehetséges összevonásokat!

$$\frac{5a-b}{6}-\frac{a-2b}{3}=\frac{5a-b}{6}-\frac{2\cdot(a-2b)}{2\cdot 3}=\frac{5a-b-2\cdot(a-2b)}{6}=$$
$$=\frac{5a-b-2a+4b}{6}=\frac{3a+3b}{6}=\frac{\overset{1}{\cancel{3}}\cdot(a+b)}{\underset{2}{\cancel{6}}}=\frac{a+b}{2}.$$

Feladatok

1. Írjuk fel algebrai kifejezéssel! A kapott kifejezések közül melyik lesz egytagú és melyik többtagú?

a) x és y összegének az 5-szöröse;
b) x és y ötszörösének a különbsége;
c) az x-nél 7-tel nagyobb számnak és y-nak a különbsége;
d) az x-nél 40%-kal kisebb és y-nál 40%-kal nagyobb számok szorzata;
e) az x és y összegénél 10%-kal nagyobb szám.

2. Egy repülőjegy ára a Ft, melyhez még b Ft repülőtéri illetéket kell fizetnünk.

a) Mennyit kell fizetnünk így n darab jegyért az illetékkel együtt?
b) Az üzemanyagárak változása miatt a jegy árát 10%-kal megemelték, az illeték árát viszont nem változtatták. Mennyibe kerül így n darab jegy?
c) Mennyivel kell többet fizetnünk n db jegyért, ha az eredeti árhoz képest a jegy árát és az illetéket is 10%-kal emelik?
d) Legalább 5 jegy vásárlása esetén $k < 5$ darab jegyre elengedik az illetéket. Mennyit kell fizetnünk így az n db jegyért, ha $n \geq 5$?

3. Végezzük el az osztásokat!

a) $\dfrac{6x \cdot 10x}{4}$; *b)* $\dfrac{6x + 10x}{4}$; *c)* $\dfrac{9xy + 21xy}{3}$; *d)* $\dfrac{9xy \cdot 21xy}{3}$.

4. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő algebrai kifejezéseket!

a) $4a + 6a - 12a + 7a$; *b)* $-5b + 3b - 9b + 2b$;
c) $11c - 3c - 5c - 3c$; *d)* $-9d + 10d - 5d + 6d$.

5. Hozzuk egyszerűbb alakra a következő algebrai kifejezéseket!

a) $5x - 4 + 2x - 7 - 6x + 9$; *b)* $4 - 5y - 5 + 2y + 2 - 6y$;
c) $6v + 2c - 3v - 1 - 7v + 7$; *d)* $10 - 5z + 4 + 4z - 15 - 2z$.

6. Végezzük el a lehetséges összevonásokat!

a) $5a + 3b - 4a - 4b + 2$; *b)* $-3c + 2d + 3 - 5c + 2d - 9$;
c) $2e - 4f + 9 - 7e - 4f + 3$; *d)* $-5g - 9h - 6 - 7g - 8 - 5h$.

7. Végezzük el a lehetséges összevonásokat!

a) $3a + 2b + (3a - 2b)$; *b)* $3a + 2b - (3a - 2b)$;
c) $3a - 2b - (3a - 2b)$; *d)* $-3a - 2b - (3a + 2b)$.

8. Végezzük el a lehetséges összevonásokat!

a) $(2x + 5y) + (4x - 3y) - (2x - 3y)$; *b)* $2x + (5y - 4x) - (3y - 2x) - 3y$;
c) $-2x - (5y + 4x) - (3y - 2x + 3y)$; *d)* $2x - (5y - 4x - 3y) + (2x + 3y)$.

9. Végezzük el a kijelölt szorzásokat!

a) $4(a + 5)$; *b)* $5(2b - 3)$; *c)* $2(3 - c)$; *d)* $4(2 - 3d)$;
e) $-2(2e + 3)$; *f)* $-5(3f - 2)$; *g)* $-6(3 - g)$; *h)* $-3(4 - 2h)$.

10. Végezzük el a kijelölt műveleteket, majd hozzuk a kifejezést egyszerűbb alakra!

a) $5(x+1)+3(x-2)$; *b)* $6(3-2y)+2(1-4y)$;

c) $4(3v-1)+(3-4v)$; *d)* $2(3z-2)+3(3-2z)$.

11. Végezzük el a kijelölt műveleteket, majd hozzuk a kifejezést egyszerűbb alakra!

a) $3(4x+1)-2\cdot(3x+2)$; *b)* $4(1-4y)-3(1+y)$;

c) $-2(3v+1)+3\cdot(4-v)$; *d)* $-5(2z-3)-2(3-5z)$.

12. Végezzük el a kijelölt műveleteket, majd hozzuk a kifejezést egyszerűbb alakra!

a) $y(2x-3)-y(x+1)$; *b)* $2a(2x+3y)-a(3x-y)$;

c) $5x(x-y)-y(2x+y)$; *d)* $-3b(4b-3a)-2(ab+5b^2)$.

13. Mennyi a következő algebrai kifejezések helyettesítési értéke?

a) $[(x-y)-(y+x)]\cdot 2$, ha $x=0{,}19$; $y=\frac{1}{4}$;

b) $a(a-b)-b(b-a)$, ha $a=10$; $b=0{,}7$;

c) $\frac{a-b}{2}+\frac{2b}{4}$, ha $a=20$; $b=0{,}19$;

d) $2(x^2-y^2)-x(2x+1)+x$, ha $x=\frac{2}{3}$; $y=-1$.

14. Pótoljuk a hiányzó tagokat úgy, hogy az egyenlőség két oldalán álló algebrai kifejezések egyenlőek legyenek!

a) $5x^2y+\square=11x^2y$; *b)* $5ab-\square+3ab=4ab$; *c)* $3x^2-y^2+\square=x^2-y^2$;

d) $2a-\square=10a$; *e)* $\frac{xy}{2}+\square=3xy$; *f)* $2x^2y-\frac{1}{2}yx^2-\square=5x^2y$.

15. Végezzük el a közös nevezőre hozást, és hozzuk egyszerűbb alakra a következő algebrai kifejezéseket!

a) $\frac{x}{3}-\frac{x}{4}$; *b)* $\frac{y-1}{4}+\frac{y}{2}$; *c)* $\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}$;

d) $\frac{x+1}{2}-\frac{x-1}{2}$; *e)* $\frac{2c+1}{4}-\frac{2c-1}{2}$; *f)* $\frac{x-2y}{3}-\frac{2x-y}{2}$.

16. Végezzük el a közös nevezőre hozást, és hozzuk egyszerűbb alakra a következő algebrai kifejezéseket!

a) $\frac{a}{3}+\frac{2a}{5}$; *b)* $\frac{3b}{4}-\frac{2b}{3}$; *c)* $\frac{c}{2}+\frac{2c+3}{3}$;

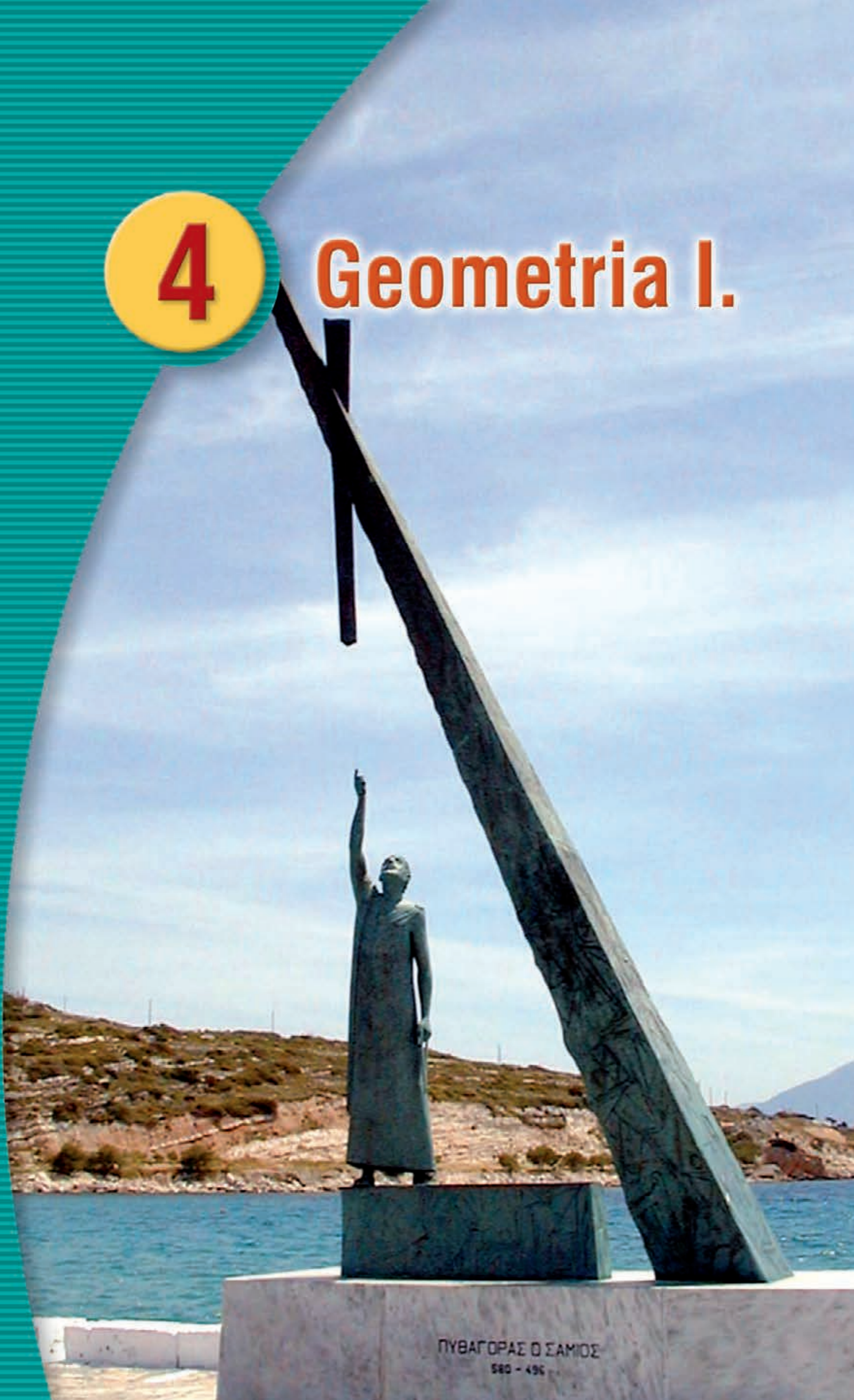
d) $\frac{d+1}{2}+\frac{2d}{5}$; *e)* $e-\frac{2e-1}{3}$; *f)* $\frac{2f+1}{5}-\frac{1-f}{3}$;

g) $\frac{2g+3}{4}-\frac{3g+1}{2}$; *h)* $\frac{3h+2}{3}-\frac{5h+4}{5}$.

Rejtvény

Nóri így adta meg postacímét új ismerősének: Budapesten lakom, a Gyík utcában. Az irányítószám, a házszám és az emelet száma is 2 hatványa, és összegük 1092. Hogyan címezze meg a borítékot?

4 Geometria I.



1. A terület

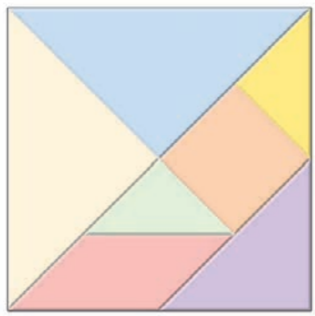
Rakjuk össze a tangram elemeiből az ábrán látható figurákat!

Számos matematikai játék alapja az, hogy különböző alakú síkidomokat előre megadott szabályok szerint kell egymáshoz illeszteni.

Ezek egyike a tangram, amely az ősi Kínából származik. Egy négyzetet daraboltak fel 7 síkidomra az ábrának megfelelően.

Az alkotórészek:

- 5 egyenlő szárú derékszögű háromszög:
  - 2 kicsi,
  - 1 közepes,
  - 2 nagy;
- 1 négyzet;
- 1 paralelogramma.



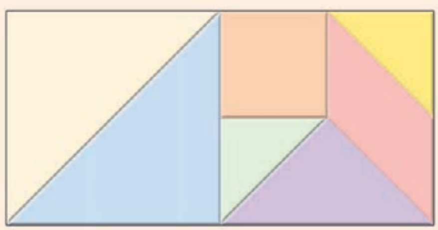
Az interneten keresgetve számos feladványt találhatunk ezekkel a síkidomokkal kapcsolatban.

A sík különböző alakzatokkal való lefedésének nagy mestere volt M. C. Escher (1898–1972) holland művész. Képei ma is népszerűek és egyben elgondolkodtatóak.

1. példa

Vágjuk ki az előző ábrán látható síkidomokat egy négyzetből, és rakjunk ki egy téglalapot!

Megoldás



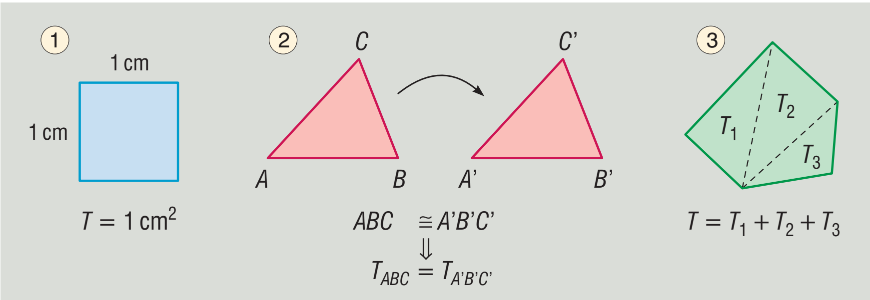
Az eredeti négyzet és a kirakott téglalap területe megegyezik, hiszen ugyanazokból a síkidomokból raktuk ki azokat.

Minden síkidomhoz hozzárendelhetünk egy pozitív számot a következő tulajdonságokkal:

A terület fogalma

1. az egységnyi oldalú négyzet (egységnégyzet) területe 1 területegység;
2. az egybevágó síkidomok területe egyenlő;
3. ha egy síkidomot részekre vágunk szét, akkor a részek területének összege egyenlő a síkidom területével.

Ez a szám a síkidom területe.



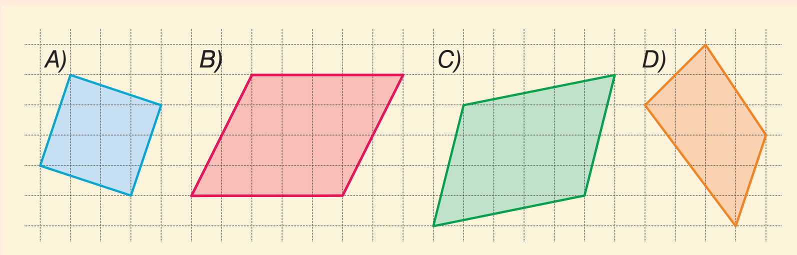
Néhány mértékegység, mellyel a területet mérjük:

$1\ \text{m}^2$: az 1 m oldalhosszúságú négyzet területe.

$1\ \text{cm}^2 = 0{,}0001\ \text{m}^2$;
$1\ \text{dm}^2 = 0{,}01\ \text{m}^2$;
$1\ \text{ár} = 100\ \text{m}^2$;
$1\ \text{ha} = 10\,000\ \text{m}^2$;
$1\ \text{km}^2 = 1\,000\,000\ \text{m}^2$.

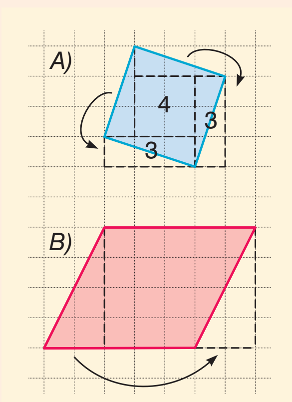
2. példa

A négyzetrácson felrajzoltunk néhány síkidomot. Mekkora ezek területe, ha egy rácsnégyzet területe 1 területegység?



Megoldás

Az egyes területek nagyságát darabolás segítségével próbáljuk megadni. Erre mutatnak egy-egy példát az alábbi ábrák.

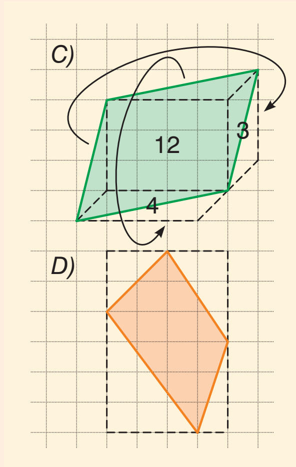


$T_A = 4 + 3 + 3 = 10$ területegység

Átdarabolás

$T_B = 5 \cdot 4 = 20$ területegység

$T_{\text{paralelogramma}} = a \cdot m_a$



$T_C = 12 + 3 + 4 = 19$ területegység

Téglalappá való kiegészítés

Egészítsük ki az ábrát téglalappá!

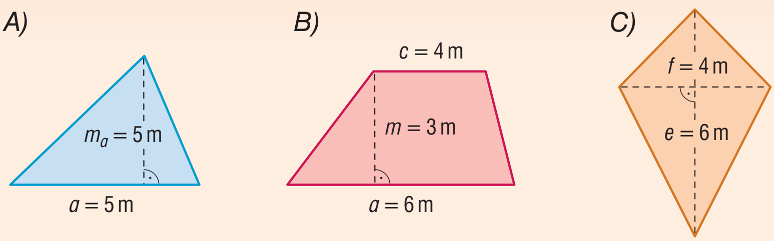
A keresett területet megkapjuk, ha a befoglaló téglalap területéből kivonjuk a csúcsokban található derékszögű háromszögek területét.

$$T_D = 6 \cdot 4 - \frac{3 \cdot 4}{2} - \frac{1 \cdot 3}{2} - \frac{2 \cdot 3}{2} - \frac{2 \cdot 2}{2} =$$

$$= 24 - \frac{12 + 3 + 6 + 4}{2} = 24 - 12{,}5 = 11{,}5 \text{ területegység.}$$

3. példa

Állítsuk területük szerint növekvő sorrendbe a következő síkidomokat!



Megoldás

Az első síkidom egy háromszög, amelynek a területe:

$$T_A = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{5 \cdot 5}{2} = 12{,}5\left(\text{m}^2\right).$$

$T_\triangle = \dfrac{a \cdot m_a}{2}$

A második esetben egy trapéz területét kell meghatároznunk:

$$T_B = \frac{a + c}{2} \cdot m = \frac{6 + 4}{2} \cdot 3 = 15\left(\text{m}^2\right).$$

$T_{\text{trapéz}} = \dfrac{a + c}{2} \cdot m$

A harmadik esetben egy deltoid területét keressük:

$$T_C = \frac{e \cdot f}{2} = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12\left(\text{m}^2\right).$$

$T_{\text{deltoid}} = \dfrac{e \cdot f}{2}$

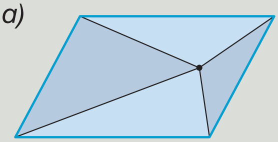
Tehát

$$T_C < T_A < T_B.$$

4. példa

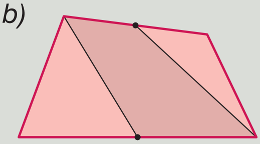
Az ábrán látható síkidomokat egy világosabb és egy sötétebb színű részre osztottuk. Igaz-e, hogy így a négyszögek területét éppen megfeleztük?

a)



egy pontot kötöttünk össze a paralelogramma csúcsaival

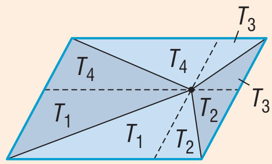
b)



oldalfelező pontokat kötöttünk össze csúcsokkal

Megoldás

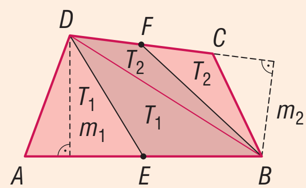
a) Az első négyszög paralelogramma. Rajzoljunk be a belső ponton át az oldalakkal párhuzamos egyeneseket! Ezek 4 paralelogrammára bontják az eredeti paralelogrammát.



A paralelogrammát az átlója egybevágó háromszögekre bontja, amelyek területe egyenlő. Az egybevágó háromszögek területét azonos betűvel jelöljük.

A sötét és a világos rész területe is $T_1 + T_2 + T_3 + T_4$.
Így a két rész területe egyenlő.

b) Rajzoljuk meg a négyszög DB átlóját, majd állítsunk merőlegest D-ből az AB oldalra! Az így kapott m_1 az ABD, AED és EBD háromszögnek is magassága.



$$\text{Az } AED\triangle \text{ területe } \frac{AE \cdot m_1}{2}, \text{ az } EBD\triangle \text{ területe } \frac{EB \cdot m_1}{2}.$$

Mivel E felezőpont, ezért $AE = EB$, így a két háromszög területe egyenlő. Jelöljük ezt T_1-gyel!

Az előbbihez hasonlóan állítsunk merőlegest B-ből DC egyenesére is! Így megkapjuk m_2-t.

$$\text{A } DFB\triangle \text{ területe } \frac{DF \cdot m_2}{2}, \text{ az } FCB\triangle \text{ területe } \frac{FC \cdot m_2}{2}.$$

$DF = FC$, így a két háromszög területe egyenlő. Jelöljük ezt T_2-vel!

A sötét rész területe $T_1 + T_2$, a világos rész területe szintén $T_1 + T_2$, tehát a két terület egyenlő.

A sötét rész területe az *a)* és *b)* esetben is fele a négyszög területének.

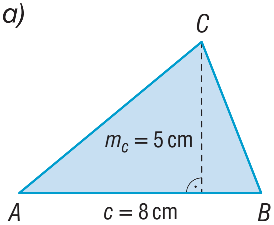
Ősi területmérték a katasztrális hold. Eredetileg az egy ekével egy nap alatt felszántott terület nagysága volt. Ennek 1600-ad része a négyszögöl.

1 katasztrális hold = 1600 négyszögöl = 5755 m^2 = 57,55 ár.

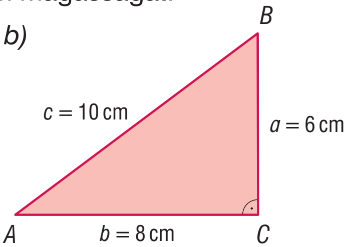
Feladatok

1. Határozzuk meg az ábrán látható háromszögek területét! A *b)* és *c)* esetben határozzuk meg a háromszög mindhárom magasságát!

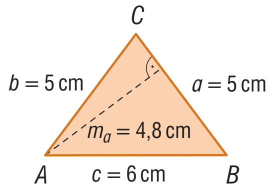
a)



b)

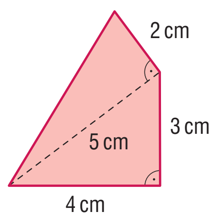


c)

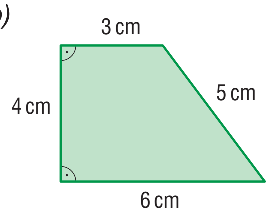


2. Határozzuk meg az alábbi négyszögek területét!

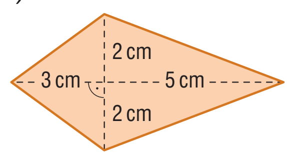
a)



b)

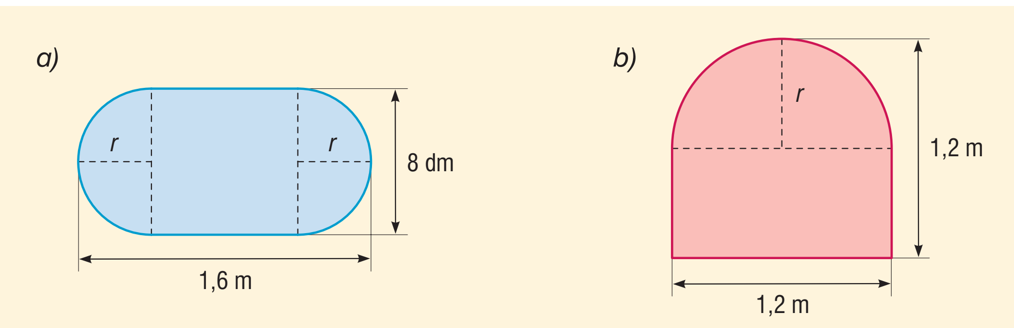


c)

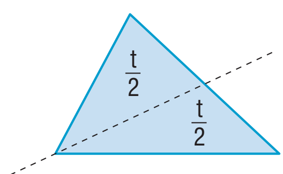


3. Egy háromszög két oldalának hossza $a = 6$ cm, $b = 7$ cm, az a oldalhoz tartozó magassága $m_a = 5$ cm. Mekkora a b oldalhoz tartozó magassága?

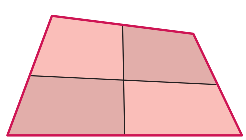
4. Egy végzős nyolcadikos osztály tablót készít. Két terv közül kell választaniuk. Melyik tablónak nagyobb a területe?



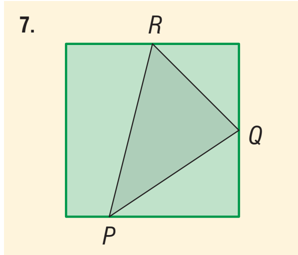
5. Egy háromszög egyik csúcsán át szerkesszünk olyan egyenest, amely felezi a háromszög területét! (➡)



6. Egy négyszögben az ábrának megfelelően összekötöttük az oldalfelező pontokat. A sötétebb részek területének összege 10 cm^2. Mekkora a négyszög területe? (➡)

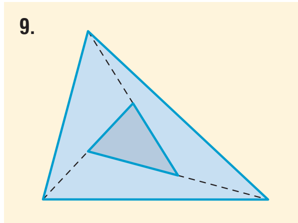


7. Egy négyzet oldalainak hossza 1 m. Mekkora a sötétebb háromszög területe, ha a *P* negyedeli, a *Q* és *R* pontok pedig felezik a megfelelő oldalakat? (➡)



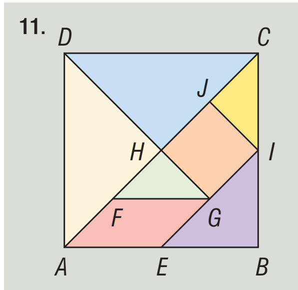
8. Egy téglalap egyik oldala 3 cm-rel nagyobb, mint a másik. Mindkét oldalt 2 cm-rel növelve a terület 26 cm^2-rel növekszik. Mekkorák az eredeti téglalap oldalai?

9. Egy háromszög oldalait az ábrának megfelelően meghosszabbítottuk az oldal hosszával, majd a végpontokat összekötöttük. Hányszorosa az így kapott háromszög területe az eredeti háromszög területének? (➡)

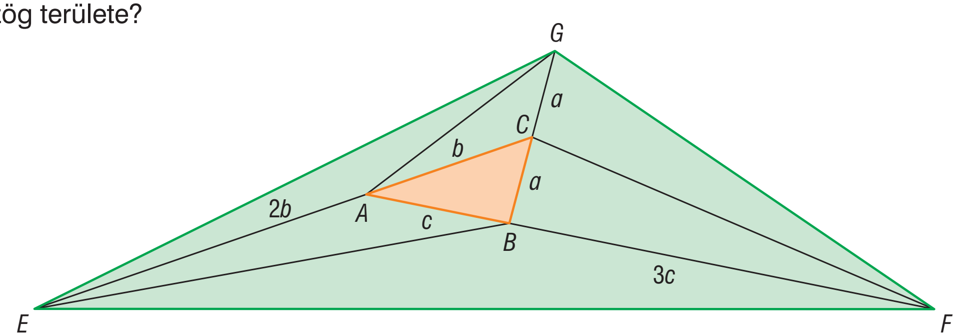


10. Egy négyzet átlójának hossza 1 dm. Hány cm^2 a négyzet területe?

11. A tangram játék darabjait egy 10 cm oldalhosszúságú négyzetből vágtuk ki. Határozzuk meg az egyes darabok területét, ha *E* az *AB*, *I* a *BC*, *H* az *AC*, *F* az *AH*, *G* az *EI* és *J* a *HC* szakasz felezőpontja! (➡)



12. Az *ABC* háromszög oldalait az ábrán látható módon meghosszabbítjuk, és az így kapott pontokat összekötjük. Hányszorosa az *ABC* háromszög területének az *EFG* háromszög területe?



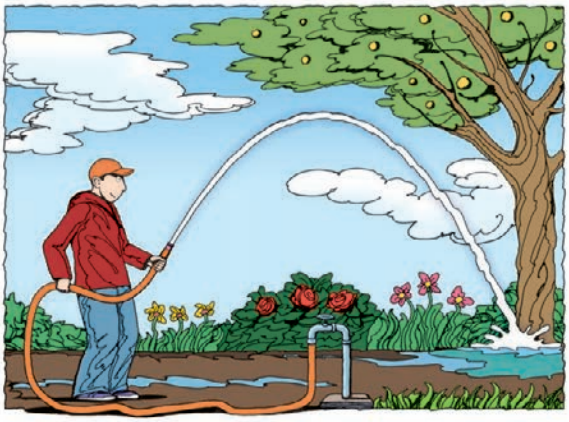
Rejtvény

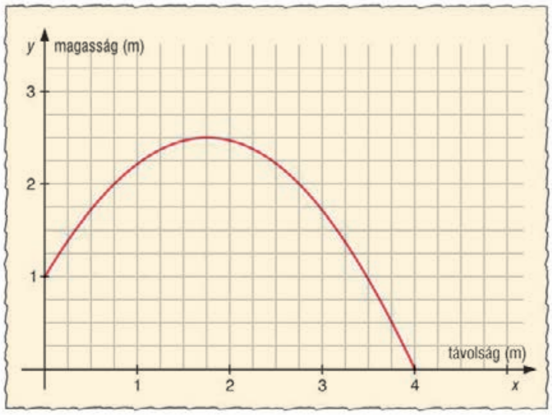
Töltsük ki az ábrát egyjegyű pozitív számokkal a következő szabályok szerint! Egy-egy összefüggő terület pontosan annyi négyzetből áll, amennyi a benne elhelyezkedő számok értéke. Az összefüggő területekben a négyzetek csakis oldalukkal csatlakozhatnak egymáshoz, az azonos nagyságú területek pedig legfeljebb csúcsaikkal érintkezhetnek egymással.

2	1	2		1
2				
1	3	3	2	
		1		
	1		2	

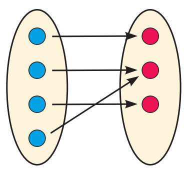
8 Függvények, sorozatok

1. Függvények, lineáris függvények





Függvény: az alaphalmaz minden eleméhez a képhalmaznak pontosan egy elemét rendeli hozzá.



értelmezési tartomány

érték-készlet

Béla locsolja a kertjét. Az ábrán a locsolócsőből távozó víz útja látható. Az x tengelyen a locsolótól mért távolságot, az y tengelyen pedig a föld szintjétől mért magasságot adjuk meg méterben.

A kapott görbe egy függvény grafikonja, hiszen minden távolsághoz pontosan egy magasságérték tartozik.

1. példa

Válaszoljunk a következő kérdésekre a fenti grafikon segítségével!

a) Milyen magasan indul a víz a locsolócsőből?

b) Milyen magasra emelkedik a vízsugár?

c) Béla helyétől hány méter távolságban ér földet a vízsugár?

d) Határozzuk meg a grafikonon látható függvény értelmezési tartományát és értékkészletét!

Megoldás

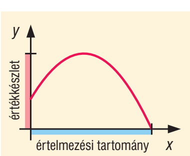
a) A grafikon kezdőpontja a (0; 1) pont, vagyis a locsolócső szájából 1 méter magasan folyik ki a víz.

b) A grafikon „legfelső” pontja az (1,75; 2,5) pont, azaz a vízsugár 2,5 méter magasra emelkedik.

c) Amikor „földet ér” a vízsugár, akkor a földtől mért távolság, azaz a második koordináta 0. A grafikonról leolvasható, hogy ez Béla helyétől 4 méter távolságra következik be.

d) Az értelmezési tartomány a 0 és 4 közé eső valós számok halmaza, a 0-t és a 4-et is beleértve.

Az értékkészlet a 0 és 2,5 közé eső valós számok halmaza, a 0-t és a 2,5-et is beleértve.



A függvényeket általában a valós számok ($\mathbb{R}$) halmazán, vagy annak valamely részhalmazán értelmezzük.

2. példa

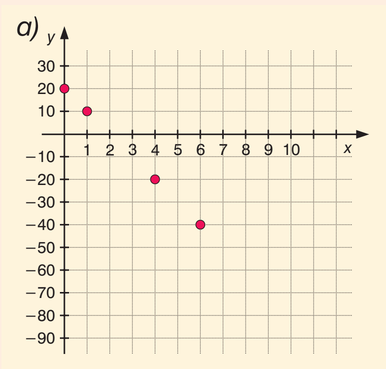
Egy kísérlet során megmérték a levegő hőmérsékletét egy adott időpontban, különböző tengerszint feletti magasságokban. Az eredményeket a következő táblázatban foglalták össze:

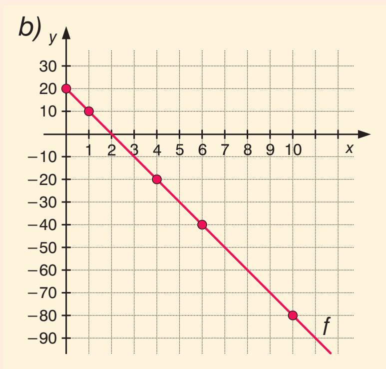
x	**Tengerszint feletti magasság (km)**	0	1	4	6
y	**Hőmérséklet (°C)**	20	10	−20	−40

a) Ábrázoljuk grafikonon a fenti adatokat!
b) Kössük össze a kapott pontokat! Mit tapasztalunk?
c) Adjuk meg, hány Celsius-fok van 10 km magasan, ha a hőmérséklet az eddigi szabályosság szerint változik!
d) Adjuk meg, hogy milyen magasságban éri el a levegő hőmérséklete a fagypontot!
e) Határozzuk meg a függvény meredekségét!
f) Írjuk le a hozzárendelés szabályát, és azt, hogy a grafikon hol metszi a tengelyeket!

tengelymetszetek

Megoldás





b) A kapott pontokat összekötve észrevehetjük, hogy ezek egy egyenesre illeszkednek.
Ez azt jelenti, hogy ez egy **lineáris függvény grafikonja.**

Lineáris függvény: a grafikonja egyenes.

c) A grafikonról leolvasható, hogy ha $x = 10$, akkor $f(x) = -80$, tehát 10 km magasságban −80 °C van.

d) Azt az x értéket keressük, ahol $f(x) = 0$. Ez a hely az $x = 2$, tehát a fagypontot, azaz a 0 °C-ot 2 km magasságban érjük el.

A függvény grafikonja ott metszi az x tengelyt, ahol a függvény értéke 0.
$f(x) = 0 \Longrightarrow x = ?$
Ez a függvény **zérushelye.**

e) A szintkülönbség 1 km-es növekedése esetén 10 °C-ot csökken a hőmérséklet, vagyis a függvény meredeksége −10.

f) f: {nemnegatív valós számok} $\to \mathbb{R}$, $x \mapsto -10x + 20$.
Az x tengelyt a (2; 0) pontban (vagyis az $x = 2$-nél) metszi, az y tengelyt a (0; 20) pontban (azaz az $y = 20$-nál) metszi a függvény grafikonja.

A függvény y tengelymetszete a függvény 0 helyen felvett értéke.
$f(0) = ?$

Használatos jelölések:
$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R};$
$x \mapsto a\,x + b$
$f(x) = a\,x + b$
$y = a\,x + b$
mere-dekség y tengely-metszet

Az $f\colon x \mapsto ax + b$ alakú függvények lineáris függvények, mivel grafikonjuk egyenes. Az egyenes meredekségét az a valós szám adja meg, az y tengelymetszetet pedig a b.

3. példa

Ábrázoljuk a következő lineáris függvények grafikonját derékszögű koordináta-rendszerben!

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{2}x - 2;$

b) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 3;$

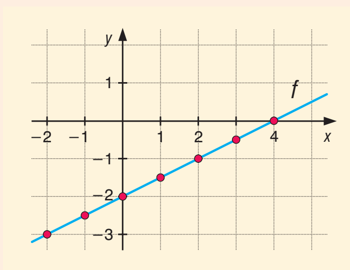
c) h: {olyan x valós számok, melyekre $-1 \le x \le 4$} $\to \mathbb{R},\ x \mapsto 2 - x.$

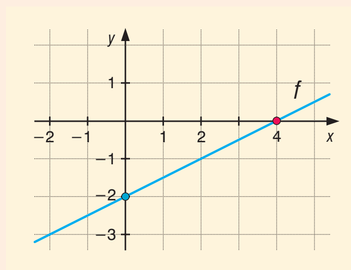
Megoldás

a) **1. módszer:** Értéktáblázat segítségével

x	−2	−1	0	1	2	3	4
f(x)	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0

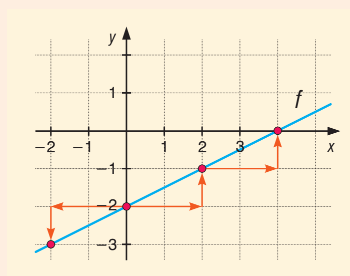
Lineáris függvények esetén a grafikonkészítés módjai:
1. az ábrázolt pontok összekötésével (elegendő két pont összekötése)
2. az y tengellyel alkotott $(0; b)$ metszéspontból indulva az a meredekség felhasználásával





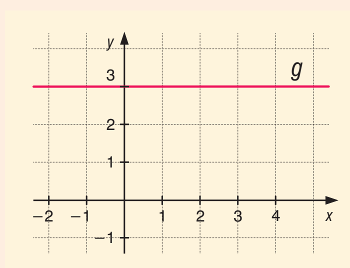
2. módszer: A hozzárendelési szabály segítségével

Az $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$ hozzárendelési szabályból leolvashatjuk, hogy az egyenes meredeksége $\frac{1}{2}$, és az y tengelyt a $(0; -2)$ pontban metszi. További pontokat úgy kapunk, hogy a meredekségnek megfelelően 2-t jobbra, 1-et felfelé lépegetünk.



$g(x) = 0 \cdot x + 3$, a függvény meredeksége 0.

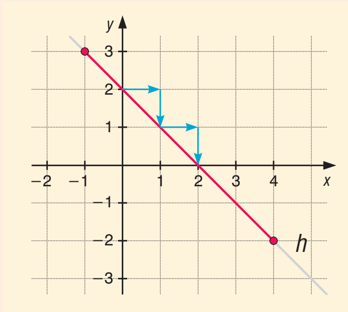
b) A $g(x) = 3$ függvény állandó (konstans), hiszen mindenütt ugyanazt az értéket veszi fel. Az ilyen függvények grafikonjának pontjai az x tengellyel párhuzamos egyenesre illeszkednek.



c) A $h(x) = 2 - x$ hozzárendelési szabály átírható $h(x) = -x + 2$ alakba. Ebből látszik, hogy

$$a = -1 \text{ és } b = 2.$$

Mivel ennek a függvénynek az értelmezési tartománya a valós számoknak egy részhalmaza ($-1 \le x \le 4$), ezért a grafikon az egyenesnek egy része.



$h(x) = -1 \cdot x + 2$

A ● jelölés azt jelenti, hogy a pont hozzátartozik a grafikonhoz.

Ha a pont nem tartozna a grafikonhoz, akkor a ○ jelölést használnánk.

Függvények a hétköznapokban

Jelenet a Szeged – Budapest intercity vonaton:

Az egyik utas felriad a szunyókálásából, és ijedten veszi észre, hogy a vonat lassít. A másik utashoz fordul:

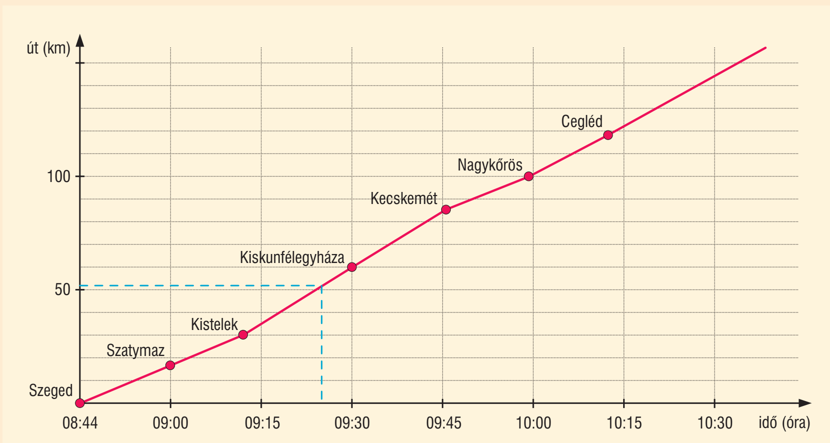
– *Elnézést, ez már Kecskemét?*

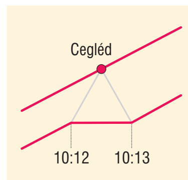
A másik utas, aki éppen egy könyvet olvas, az órájára pillant, és azt mondja:

– *9 óra 25 perc van.*

Erre az első utas megnyugodva visszaül.

Ha a vonat menetrend szerint halad, akkor az időpont egyértelműen meghatározza a helyét. A menetrend **a vonat út-idő függvénye.**





A vonat a menetrend szerint az állomáson rövid időre megáll.

Természetesen a valóságban lejátszódó eseményeknél adódhat eltérés az elméleti értékhez képest, a különböző napokon induló vonat helye 9 óra 25 perckor kismértékben különbözhet egymástól és a menetrendben meghatározott értékektől.

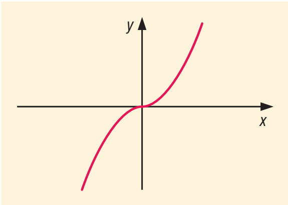
A tudományok legérdekesebb feladatai közé tartozik a természet törvényeinek felismerése, vagyis annak „kiderítése", hogy bizonyos folyamatokban melyik mennyiség melyiktől függ (és melyiktől nem), és hogyan.

Még ha nem is gondolunk rá, a függvények egész életünket áthatják. A fáról lehulló alma esését és a bolygók Nap körüli mozgását ugyanaz a gravitációs erőtörvény határozza meg. Az ezt leíró függvény ismerete nélkül nem léphetett volna az ember a Holdra, és nem lennének tévéműsort közvetítő vagy meteorológiai műholdak sem.

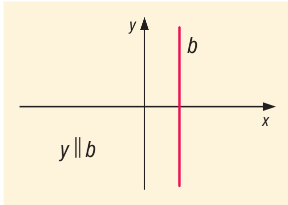
Feladatok

1. Válasszuk ki, hogy melyik grafikon ábrázol függvényt! Választásunkat indokoljuk!

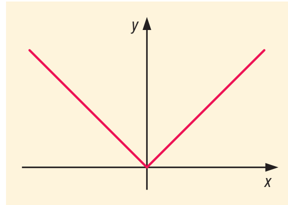
a)



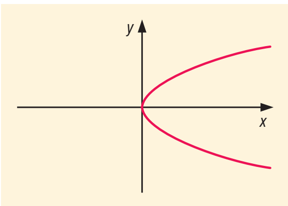
b)



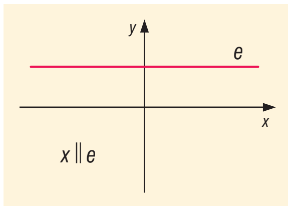
c)



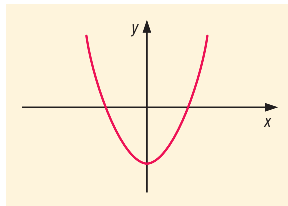
d)



e)



f)



2. Soroljuk fel, hogy az adott pontok az

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x - 20$; $\quad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 - 1$; $\quad h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 3$ függvények

közül melyiknek a grafikonjára illeszkednek! (Egy pont több függvényhez is tartozhat!)

a) $P(0;\ 3)$; *b)* $Q(2;\ 3)$; *c)* $R(-2;\ 3)$; *d)* $S(-1;\ -1)$; *e)* $T(5;\ 9)$.

3. Vizsgáljuk meg, melyik hozzárendelési szabály alapján töltöttük ki az értéktáblázatokat, majd nézzük meg, hogy a megadott pontok melyik grafikonra illeszkednek!

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 3 - 4x$; $\quad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{1}{x} - 2$;

$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 - 4x + 3$; $\quad k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x - 2| - 1$.

1.

x	−2	−1	0	1	2
y	−2,5	−3	—	−1	−1,5

2.

x	−2	−1	0	1	2
y	15	8	3	0	−1

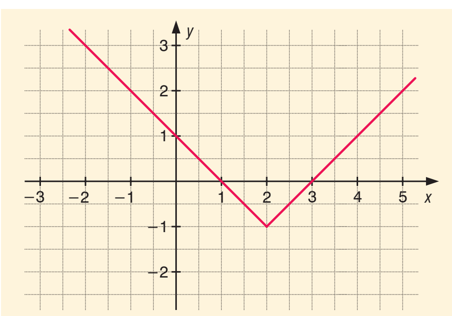
3.

x	−2	−1	0	1	2
y	3	2	1	0	−1

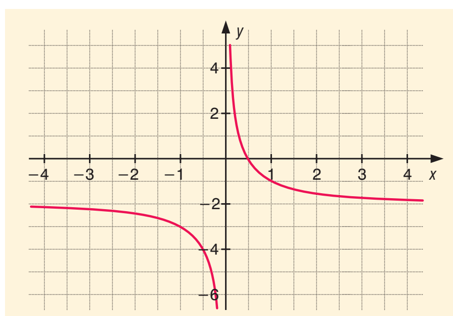
4.

x	−2	−1	0	1	2
y	11	7	3	−1	−5

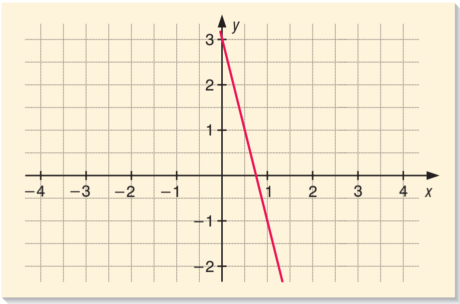
A)



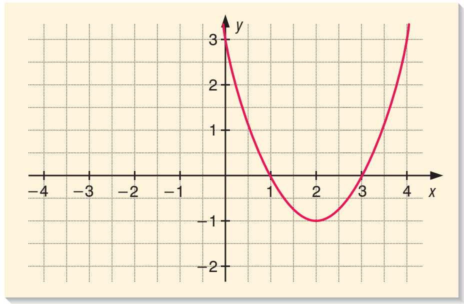
B)



C)



D)



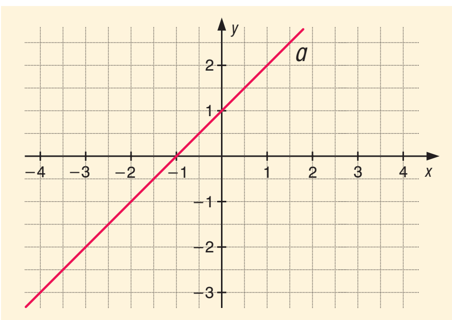
4. Ábrázoljuk (ha tudjuk, értéktáblázat nélkül) a következő lineáris függvényeket!

f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x - 4$; g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -x + 3$;

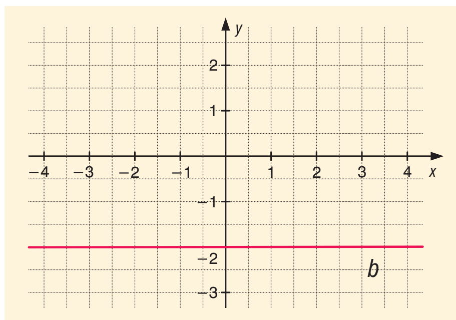
h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x + 6$; k: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 4 - 3x$.

5. Határozzuk meg a grafikonokon látható lineáris függvények meredekségét, tengelymetszeteit és hozzárendelési szabályát!

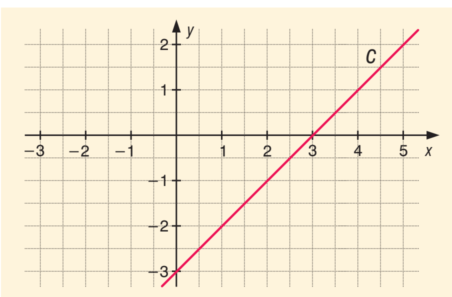
a)



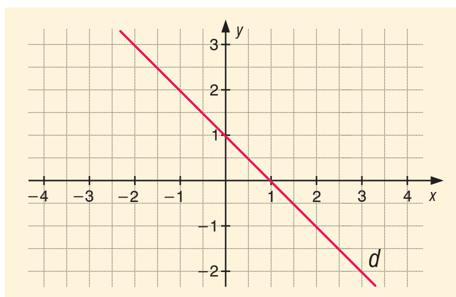
b)



c)



d)



6. Egy derékszögű háromszög egyik hegyesszögét (α) változtatjuk. Hogyan változik ennek függvényében a másik hegyesszög (β)?

a) Töltsük ki a táblázatot!

x	**Egyik hegyesszög** (α)	20°	45°			60°	
y	**Másik hegyesszög** (β)			80°	22,5°		

b) Mi a hozzárendelés szabálya?

c) Határozzuk meg a függvény értelmezési tartományát és értékkészletét!

d) Készítsük el a grafikonját!

***7.** A megfigyelések szerint az, hogy egy tücsök mennyire intenzíven ciripel, a hőmérséklettől függ. Egy átlagos tücsök 20 °C-on 115-öt, 25 °C-on viszont már 145-öt ciripel egy perc alatt. Jelöljük *T*-vel a °C-ban megadott hőmérsékletet, *N*(*T*)-vel pedig a percenkénti ciripelések számát *T* hőmérsékleten. (15 °C alatt nem ciripel a tücsök, 45 °C felett pedig nem marad életben.)

a) Egészítsük ki a táblázatot, ha tudjuk, hogy *N*(*T*) lineáris függvény!

T (°C)	15	20	25	30	35	40	45
$N(T)$ $\left(\frac{\text{cirip}}{\text{perc}}\right)$		115	145				

b) Készítsük el a függvény grafikonját megfelelő beosztású koordináta-rendszerben!

c) Határozzuk meg a függvény meredekségét!

d) Mennyit ciripel egy tücsök egy perc alatt, ha a hőmérséklet 26 °C?

e) Tervezzünk „tücsökhőmérőt”! Hogyan lehetne ezt az összefüggést arra használni, hogy a tücsök ciripeléséből meghatározzuk, hány Celsius-fok van?

***8.** Egy mézeskalácsárus hosszú évek tapasztalata alapján tudja, hogy ha a brüsszeli vásárban *x* eurót kér a mézeskalács darabjáért, akkor összesen $f(x) = 40 - 2x$ darab mézeskalácsot tud eladni egy nap alatt.

a) Ábrázoljuk a függvény grafikonját megfelelő beosztású koordináta-rendszerben! Figyeljünk, hogy sem az ár, sem az eladott darabszám nem lehet negatív!

b) Hol metszi a függvény az *x* tengelyt? Mit jelent ez?

c) Hol metszi a függvény az *y* tengelyt? Mit jelent ez?

d) Mennyi a függvény meredeksége? Értelmezzük!

e) Mi a függvény értékkészlete és értelmezési tartománya?

***9.** A hőmérsékletet Celsius-fokban (°C) és Fahrenheit-fokban (°F) is mérik. Ha *C* Celsius-fok van, akkor a Fahrenheit-fokban mért hőmérsékletet az $F(C) = 1{,}8C + 32$ képlet adja meg.

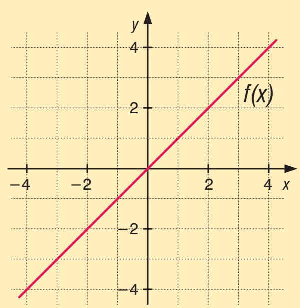
a) Ábrázoljuk az *F*(*C*) függvényt egy olyan derékszögű koordináta-rendszerben, ahol a vízszintes tengely a *C*, a függőleges az *F*.

b) Hány °F-on fagy meg a víz, és hány fokon forr fel?

c) Fejezzük ki a 10 °F hőmérsékletet Celsius-fokban!

Rejtvény

Balázs grafikus számológépével ábrázolta az $f(x) = \dfrac{5x^2 + 950x}{1000}$ függvény grafikonját, és a következőt látta.



Balázs szerint ez nyilvánvalóan egy lineáris függvény grafikonja. Igaza van Balázsnak? Indokoljunk!