Jakab Tamás
Kosztolányi József
Pintér Klára
Vincze István

sokszínű

# Matematika 7

Aktiváló kóddal

DIGITÁLIS VÁLTOZATBAN IS ELÉRHETŐ


MOZAIK
www.mozaik.info.hu

Jakab Tamás
Kosztolányi József
Pintér Klára
Vincze István

# Matematika

## tankönyv

# 7

Tizenkettedik, változatlan kiadás

Mozaik Kiadó – Szeged, 2019

## A tankönyv fejezetei

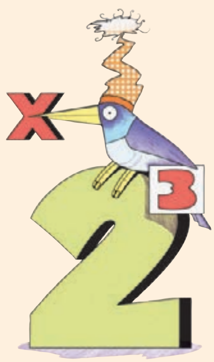


# Tartalomjegyzék

## Természetes számok, racionális számok



## Algebrai kifejezések





## Egyenletek, egyenlőtlenségek

## Síkgeometria I.



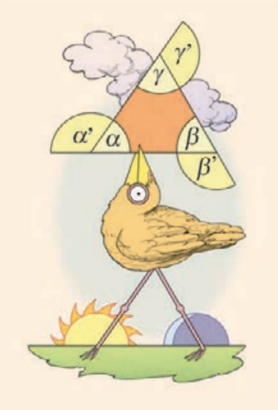
## Halmazok, kombinatorika



## Lineáris függvények, sorozatok



## Síkgeometria II.






## Statisztika, valószínűség




## Térgeometria



### Útmutató a könyv használatához

A könyv jelrendszere és kiemelései segítenek a tananyag elsajátításában. A leckék legtöbbször kidolgozott példákkal kezdődnek. Ezek gondolatmenetét érdemes elemezni és megérteni, mert mintát nyújtanak a további feladatok megoldásához is. A megtanulandó legfontosabb szabályokat és meghatározásokat a könyv zöld aláfestéssel és vastag betűs kiemeléssel jelzi. A *-gal jelölt gyakorló feladatok megoldásához ügyes ötletek szükségesek. A lapszélen olvasható apró betűs információk a mindennapi élettel, a matematika alkalmazásával kapcsolatos érdekességek, magyarázatok, kiegészítő ismeretek vagy kérdések.

# 1 Természetes számok, racionális számok

# 1. A racionális számok alakjai


Természetes számok ($\mathbb{N}$)

$\downarrow$ kivonás $2 - 5 = -3$

Egész számok ($\mathbb{Z}$)

$\downarrow$ osztás $2 : 5 = \frac{2}{5}$

Racionális számok ($\mathbb{Q}$) (két egész szám hányadosaként felírható számok)

A számok majdnem olyanok, mint az emberek. Vannak közöttük azonos családba tartozók, mint például az egész számok vagy a racionális számok. Vannak közöttük híresebbek, és vannak egészen hétköznapiak is. Még arra is képesek lehetnek, hogy egy-egy alkalommal más és más ruhába bújjanak!

A nagy francia forradalom idején születtek azok a javaslatok, melyek alapján bevezették a tízes mértékegységrendszert. Ekkor az újítások hívei inkább a tizedes törtekkel, míg a régi rend hívei a törtekkel számoltak.

**1. példa**

Írjuk át a következő számokat tizedes tört alakba! Milyen tizedes törtet kapunk?

*a)* $-\frac{12}{3}$; *b)* $3\frac{3}{4}$; *c)* $\frac{1}{9}$.

**Megoldás**

*a)* $-\frac{12}{3} = (-12) : 3 = -4$ ⟶ egész szám;

*b)* $3\frac{3}{4} = \frac{15}{4} = 15 : 4 = 3{,}75$ ⟶ véges tizedes tört;

*c)* $\frac{1}{9} = 1 : 9 = 0{,}\dot{1}$ ⟶ végtelen szakaszos tizedes tört.

$-\frac{12}{3} = \frac{-12}{3} = \frac{12}{-3} = -4$

$\frac{12}{3} = \frac{-12}{-3} = 4$

Egy tört akkor pozitív, ha számlálója és nevezője azonos előjelű.

Eredményeink azt sugallják, hogy a racionális számok tizedes tört alakja háromféle lehet:

– egész szám;
– véges tizedes tört;
– végtelen szakaszos tizedes tört.

**2. példa**

Írjuk át a következő tizedes törteket tört alakba!

*a)* 0,2;  *b)* −3,25;  *c)* $1,\dot{1}$.

**Megoldás**

*a)* $0{,}2 = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5}$.

*b)* $-3{,}25 = -\dfrac{325}{100} = -\dfrac{13}{4}$.

*c)* Használjuk fel az előző feladatban kapott eredményt! Ennek alapján $\dfrac{1}{9} = 0{,}\dot{1}$. Így:

$$1{,}\dot{1} = 1 + 0{,}\dot{1} = 1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9}.$$

Bővítés:

· 25

$$\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 0{,}75$$

· 25

Egyszerűsítés:

: 25

$$\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

: 25

Eredményeink alapján elmondható, hogy egy racionális szám többféle alakban is felírható.

Így például az $1 = \dfrac{7}{7} = 0{,}\dot{9}$ ugyanazt a racionális számot jelenti.

$$0{,}\dot{1} = \frac{1}{9}$$

$$0{,}\dot{9} = 9 \cdot 0{,}\dot{1} = 9 \cdot \frac{1}{9} = 1$$

**3. példa**

Rendezzük növekvő sorrendbe, és ábrázoljuk számegyenesen a következő számokat!

$$0{,}3; \quad -0{,}6; \quad \frac{3}{8}; \quad -\frac{35}{50}; \quad 0{,}\dot{6}.$$

**Megoldás**

Írjuk át mindegyik számot tizedes tört alakba!

$$\frac{3}{8} = 3 : 8 = 0{,}375; \qquad -\frac{35}{50} = -\frac{7}{10} = -0{,}7; \qquad 0{,}\dot{6} = 0{,}666\ldots$$

$|0{,}6| = 0{,}6$

$|-0{,}6| = 0{,}6$

Növekvő sorrendbe rendezve:

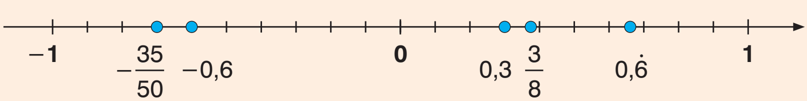
$$-0{,}7 < -0{,}6 < 0{,}3 < 0{,}375 < 0{,}\dot{6}.$$

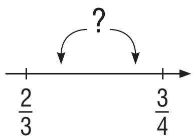
$$0{,}\dot{6} = 6 \cdot 0{,}\dot{1} = 6 \cdot \frac{1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Így az adott számok növekvő sorrendje:

$$-\frac{35}{50} < -0{,}6 < 0{,}3 < \frac{3}{8} < 0{,}\dot{6}.$$

Számegyenesen ábrázolva:





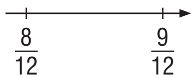

### 4. példa

Írjunk fel két olyan racionális számot, amely a $\frac{2}{3}$ és a $\frac{3}{4}$ közé esik!

**1. megoldás**

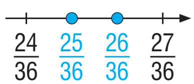
Két adott racionális szám közé eső racionális számot többféleképpen kaphatunk. Megtehetjük például, hogy a köztük levő távolságot három egyenlő részre osztjuk. Az eredeti két tört különbsége (távolsága a számegyenesen):

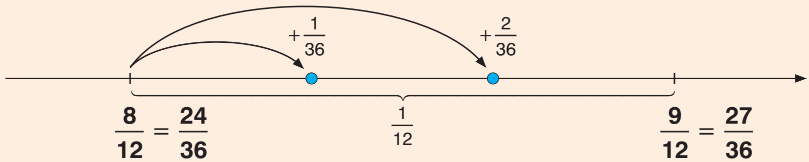
$$\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{9}{12} - \frac{8}{12} = \frac{1}{12}.$$




Ezt a különbséget osszuk három egyenlő részre!

$$\frac{1}{12} : 3 = \frac{1}{36}.$$




Így a számegyenesen kijelölt két szám:

$$\frac{8}{12} + \frac{1}{36} = \frac{24}{36} + \frac{1}{36} = \frac{25}{36} \quad \text{és} \quad \frac{8}{12} + \frac{2}{36} = \frac{24}{36} + \frac{2}{36} = \frac{26}{36}.$$

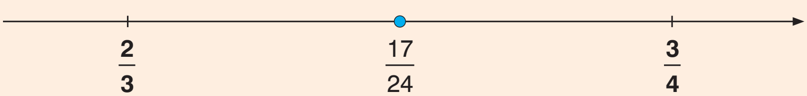
Tehát:
$$\frac{2}{3} < \frac{25}{36} < \frac{26}{36} < \frac{3}{4}.$$

**2. megoldás**

Felhasználhatjuk azt is, hogy bármely két különböző szám átlaga a számegyenesen a két szám közé esik.

Két racionális szám összege, különbsége, szorzata, átlaga is racionális szám.

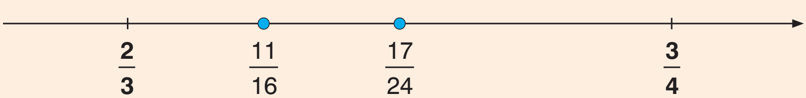
A $\frac{2}{3}$ és a $\frac{3}{4}$ átlaga: $\left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right) : 2 = \left(\frac{8}{12} + \frac{9}{12}\right) : 2 = \frac{17}{12} : 2 = \frac{17}{24}$.




Most vegyük a $\frac{2}{3}$ és a $\frac{17}{24}$ átlagát!

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{17}{24}\right) : 2 = \left(\frac{16}{24} + \frac{17}{24}\right) : 2 = \frac{33}{24} : 2 = \frac{33}{48} = \frac{11}{16}.$$

Tehát:
$$\frac{2}{3} < \frac{11}{16} < \frac{17}{24} < \frac{3}{4}.$$




Bármely két racionális szám közé beilleszthető egy újabb racionális szám (például a két szám átlaga). Így bármely két racionális szám közé végtelen sok racionális szám írható.

# Feladatok

**1.** Írjuk fel a következő számokat tizedes tört alakban!

*a)* $\frac{1}{4}$; *b)* $\frac{2}{5}$; *c)* $-\frac{5}{16}$; *d)* $2\frac{3}{7}$;

*e)* $-\frac{20}{8}$; *f)* $-5\frac{1}{8}$; *g)* $\frac{4}{20}$; *h)* $-\frac{5}{8}$.

**2.** Írjuk fel tört alakban a következő tizedes törteket!

*a)* $0{,}2$; *b)* $0{,}125$; *c)* $1{,}15$; *d)* $1{,}\dot{6}$;

*e)* $-2{,}5$; *f)* $-0{,}16$; *g)* $2{,}\dot{9}$; *h)* $-3{,}875$.

**3.** Melyik a kakukktojás a következő számok között?

*a)* $\boxed{0{,}25}$ $\boxed{\frac{1}{4}}$ $\boxed{\frac{2}{9}}$ $\boxed{\frac{10}{40}}$; *b)* $\boxed{1{,}2}$ $\boxed{\frac{12}{6}}$ $\boxed{\frac{120}{10}}$ $\boxed{\frac{240}{20}}$;

*c)* $\boxed{-\frac{3}{5}}$ $\boxed{-0{,}6}$ $\boxed{\frac{-6}{12}}$ $\boxed{-\frac{18}{30}}$; *d)* $\boxed{\frac{1}{6}}$ $\boxed{1{,}6}$ $\boxed{0{,}1\dot{6}}$ $\boxed{\frac{8}{42}}$.

**4.** Döntsük el a következő állításokról, hogy melyik igaz, és melyik hamis!

*a)* Ha egy tört számlálójának és nevezőjének előjele különböző, akkor a tört negatív.
*b)* Van olyan egész szám, amelyiknél a reciproka nagyobb.
*c)* Ha két tört számlálója és nevezője egyenlő, akkor a törtek is egyenlők egymással.
*d)* Ha két törtszám tizedes tört alakja azonos, akkor a törtek nevezője is egyenlő.
*e)* Egyetlen olyan racionális szám van, amelyik egyenlő a reciprokával.

**5.** Írjunk a $-\frac{3}{\square}$ törtbe a négyzet helyére olyan számot, hogy a tört

*a)* legalább 1 legyen; *b)* legfeljebb $-1$ legyen;
*c)* pozitív, és 1-nél kisebb legyen; *d)* negatív, és $-1$-nél nagyobb legyen!

**6.** Melyik szám nagyobb?

*a)* A $0{,}17$ vagy az $\frac{1}{6}$; *b)* a $0{,}92$ vagy a $\frac{12}{13}$; *c)* a $-\frac{225}{11}$ vagy a $-20{,}5$?

**7.** Rendezzük növekvő sorrendbe a következő számokat, és ábrázoljuk őket számegyenesen!

*a)* $1{,}25$; $1\frac{1}{2}$; $\frac{15}{6}$; $2{,}5$; *b)* $0{,}2$; $\frac{2}{5}$; $\frac{1}{3}$; $0{,}\dot{6}$;

*c)* $-0{,}2$; $-\frac{2}{5}$; $-\frac{1}{3}$; $-0{,}\dot{6}$; *d)* $-1{,}25$; $-1\frac{1}{2}$; $-\frac{15}{6}$; $-2{,}5$;

*e)* $-0{,}2$; $\frac{2}{5}$; $-\frac{1}{3}$; $-0{,}\dot{6}$; *f)* $1{,}25$; $-1\frac{1}{2}$; $\frac{15}{6}$; $-2{,}5$.

**8.** Milyen sorszámú helyeken szerepel 2-es számjegy a tizedesvessző után az $\frac{1}{7}$ tört tizedes tört alakjában?

**9.** Milyen számjegy szerepel az $\frac{1}{7}$ tört tizedes tört alakjában a tizedesvessző után

*a)* a 2. helyen; *b)* a 20. helyen; *c)* a 2008. helyen?

**10.** Milyen számjegy áll a tizedesvessző után a 100. helyen a következő törtek tizedes tört alakjában?

*a)* $\frac{1}{12}$; *b)* $\frac{2}{7}$; *c)* $\frac{2}{11}$; *d)* $\frac{33}{13}$.

**11.** A *Lenge szél* vitorlásversenyen Annáék egy és negyed óra alatt érték célba, Boriék $\frac{5}{6}$ óra alatt, Katiék 85 perc alatt, Dóriék 1,6 óra alatt, Eszteréк pedig $\frac{8}{6}$ óra alatt.

Milyen sorrendben futottak be a célba?

**12.** Írjunk fel két olyan racionális számot, amely a

*a)* a $\frac{2}{3}$ és az 1; *b)* a $\frac{2}{5}$ és a $\frac{3}{5}$; *c)* az $\frac{1}{10}$ és az $\frac{1}{5}$ közé esik!

A kapott számokat ábrázoljuk számegyenesen!

**13.** Ábrázoljuk koordináta-rendszerben az alábbi pontokat, és kössük össze őket az adott sorrendben! Folytassuk még 4 ponttal a felsorolást!

$A\left(0; -\frac{1}{4}\right)$; $B\left(\frac{1}{2}; 0\right)$; $C(0; 1)$; $D(-2; 0)$; $E(0; -4)$; $F(8; 0)$.

**14.** Játsszuk el! Ketten felváltva húznak az $\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{5}\ \boxed{6}\ \boxed{7}\ \boxed{8}$ kártyákból. Ezután külön-külön előállítanak egy-egy törtet úgy, hogy a $\frac{\square\square}{\square\square}$ ábrába tetszőlegesen berakják a kártyákat a téglalapok helyére. Az nyer, aki nagyobb törtet tud előállítani. Mikor lesz a tört értéke a legnagyobb, és mikor lesz a legkisebb?

Rejtvény

**Mi a lehetséges legkisebb és legnagyobb értéke az 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 : 8 : 9 kifejezésnek, ha tetszőlegesen zárójelezhetünk?**

# 3 Egyenletek, egyenlőtlenségek

# 5. Amit nem szabad elfelejteni: az egyenlet alaphalmaza


**1. példa**

2007. május 23-án a 34 fős 7. b osztályban éppen háromszor annyian nézték a Bajnokok Ligája döntőjét, mint ahányan valamelyik másik csatorna műsorát. Nyolcan egyáltalán nem néztek tévét aznap este. Hányan látták az osztályból a döntőt?

**Megoldás**

*Kérdés:* Hányan nézték a BL-döntőt?

*Adatok:*

| | | |
|---|---|---|
| Mást nézett: | $x$ | Összesen: 34. |
| focit nézett: | $3x$ | |
| semmit sem nézett: | 8 | |

Írjunk fel egyenletet! Az osztály tanulóinak száma:

$$
\begin{aligned}
x + 3x + 8 &= 34 \\
4x + 8 &= 34 \qquad / -8 \\
4x &= 26 \qquad / :4 \\
x &= 6{,}5
\end{aligned}
$$

Azt kaptuk, hogy 6,5 gyerek nézett más műsort, 19,5 gyerek pedig focimeccset. Azonban annak, hogy 19,5 ember néz egy tévéműsort, nincs értelme, a feladat megoldása csak természetes szám lehet.

*A válasz:* A feladatnak nincs megoldása.

*Megjegyzés:* Az egyenlet megoldása helyes volt, mert

$$6{,}5 + 3 \cdot 6{,}5 + 8 = 26 + 8 = 34,$$

de az egyenlet felírásából hiányzott az a feltétel, hogy $x$ csak természetes szám lehet.

Az egyenlet **alaphalmazának** nevezzük azt a számhalmazt, melynek elemei között az egyenlet megoldását keressük.

A szöveges feladatok megoldását a szöveg alapján kell ellenőrizni!

Az ismeretlennek az alaphalmazba eső azon értékét, amelyre az egyenlőség teljesül, az **egyenlet megoldásának** vagy **gyökének** nevezzük.

Az egyenletmegoldás lépései:

**1.** Meghatározzuk az ismeretlen azon értékét, amelyre az egyenlőség teljesül.

**2.** Megvizsgáljuk, hogy a kapott érték az alaphalmazba esik-e.

**3.** Behelyettesítéssel ellenőrzünk.

**4.** Válaszolunk.

### 2. példa

Oldjuk meg az $\frac{x+8}{2} = 3$ egyenletet a negatív egész számok halmazán!

**Megoldás**

$$\frac{x+8}{2} = 3 \qquad / \cdot 2$$

$$x + 8 = 6 \qquad / -8$$

$$\underline{\underline{x = -2}}$$

A $-2$ negatív egész szám, tehát beleesik az alaphalmazba.

*Ellenőrzés:* Bal oldal: $\frac{-2+8}{2} = 3$.

Mivel mindkét oldalon ugyanaz a szám áll, az egyenlet megoldása jó.

*Válasz:* $x = -2$.

### 3. példa

Oldjuk meg az $\frac{1-x}{4} + 2x = 5$ egyenletet a 3-nál nagyobb racionális számok halmazán!

**Megoldás**

Arra törekszünk, hogy a tört magában álljon az egyenlet egyik oldalán. Ezt elérhetjük

Mérlegelvvel:

$$\frac{1-x}{4} + 2x = 5 \qquad / -2x$$

$$\frac{1-x}{4} = 5 - 2x \qquad / \cdot 4$$

$$1 - x = 4 \cdot (5 - 2x)$$

$$1 - x = 20 - 8x \qquad / +8x$$

$$1 + 7x = 20 \qquad / -1$$

$$7x = 19 \qquad / :7$$

$$x = \frac{19}{7}$$

Közös nevezőre hozással:

$$\frac{1-x}{4} + 2x = 5$$

$$\frac{1-x+8x}{4} = 5 \qquad / \cdot 4$$

$$1 + 7x = 20 \qquad / -1$$

$$7x = 19 \qquad / :7$$

$$x = \frac{19}{7}$$

A $\frac{19}{7} < 3$, tehát nem esik bele az alaphalmazba.

*Válasz:* A feladatnak nincs megoldása.

Ha egy egyenletnek nincs megadva az alaphalmaza, akkor általában azt a legbővebb halmazt tekintjük alaphalmaznak, amelyen az egyenletben szereplő műveletek elvégezhetők, illetve a szövegnek értelme van.

**4. példa**

Oldjuk meg a $\dfrac{2x-5}{3}+\dfrac{x-1}{2}=6$ egyenletet a természetes számok halmazán!

**Megoldás**

$$\frac{2x-5}{3}+\frac{x-1}{2}=4$$

Hozzuk közös nevezőre a bal oldalon álló törteket!

A tört számlálójában álló kifejezést közös nevezőre hozáskor zárójelbe kell tenni!

$$\frac{2\cdot(2x-5)+3\cdot(x-1)}{6}=6 \qquad /\cdot 6$$

$$2\cdot(2x-5)+3\cdot(x-1)=36$$

$$4x-10+3x-3=36$$

$$7x-13=36 \qquad /+13$$

$$7x=49$$

$$\underline{\underline{x=7}}$$

A 7 természetes szám, tehát beleesik az alaphalmazba.

*Ellenőrzés:* Bal oldal:

$$\frac{2\cdot 7-5}{3}+\frac{7-1}{2}=\frac{14-5}{3}+\frac{6}{2}=\frac{9}{3}+3=3+3=6.$$

Megegyezik a jobb oldallal, ezért az egyenlet megoldása jó.

*Válasz:* $x=7$.

# Feladatok

**1.** Oldjuk meg az egyenleteket a természetes számok halmazán!

*a)* $\dfrac{x+2}{3}=4$; *b)* $\dfrac{x+7}{2}=1$; *c)* $\dfrac{x-5}{4}=-2$;

*d)* $\dfrac{5x+1}{2}=8$; *e)* $\dfrac{3x-2}{4}=5$; *f)* $\dfrac{1-2x}{3}=-7$.

**2.** Oldjuk meg az egyenleteket a negatív racionális számok halmazán!

*a)* $\dfrac{x-1}{3}+4=2$; *b)* $\dfrac{2x+7}{4}-1=5$; *c)* $\dfrac{1-3x}{2}+5=8$;

*d)* $\dfrac{x-3}{4}+2=x$; *e)* $\dfrac{2x-1}{3}+x=-2$; *f)* $\dfrac{4-3x}{2}-2x=5$.

**3.** Oldjuk meg az egyenleteket az 1-nél nagyobb racionális számok halmazán!

*a)* $\dfrac{3x-4}{2}+\dfrac{x}{3}=1;$ *b)* $\dfrac{4x+2}{4}+\dfrac{x+3}{2}=5;$

*c)* $\dfrac{2x-5}{4}+\dfrac{x-3}{5}=2x;$ **d)* $\dfrac{x+7}{2}-\dfrac{2x-1}{7}=x-1.$

**4.** Az iskolai énekkarban a gyerekek 40%-a énekli a szoprán szólamot, egyharmada az altot, 14 gyerek pedig a mezzoszopránt. Hány tagú az iskolai énekkar?

**5.** Öcsinek és Huginak összesen 52 foga van. Ha Huginak éppen feleennyi foga lenne, Öcsinek pedig kétszer ennyi, akkor Huginak eggyel több foga lenne, mint Öcsinek. Hány foga van Huginak?

**6.** 2005-ben Belgium egy főre jutó nemzeti összterméke (GDP, ejtsd dzsídípí)) 5610 dollárral volt több, mint Magyarország GDP-jének háromszorosa. Észtország egy főre jutó GDP-je 46 dollárral volt kevesebb, mint Magyarország és Belgium együttes GDP-jének egyötöde. Észtország egy főre jutó GDP-je 2005-ben 9100 dollár volt. Mennyi volt Magyarország egy főre jutó GDP-je 2005-ben?

**7.** A városi korcsolyapálya pénztárosa szombat este megszámolta, hogy hány belépőt adott el aznap. Azt kapta, hogy a délelőtti és délutáni nyitvatartás alatt is éppen 70-nel több diákjegyet vásároltak, mint felnőttet, valamint déletőtt összesen 110-en, délután pedig 125-en vettek jegyet. Amikor a jégpálya igazgatója ezt meghallotta, azt állította, hogy valamelyik számolás hibás. Honnan tudhatta ezt?

**8.** A *Marci és a cukorkagyár* című film a nyitó hétvégéjén az USA-ban éppen a *Háry Péter 3* által hozott bevétel háromötödét produkálta. A két film azonban együtt is 2,3 millió dollárral kevesebbet hozott, mint a *Békaember 3*, ami 151,1 millió dollár bevétellel zárt. Mennyi volt a *Marci és a cukorkagyár,* illetve a *Háry Péter 3* bevétele a nyitó hétvégéjükön?

**9.** Laci megszámolta a széklábakat az osztályban. A teremben három- és négylábú székek voltak, és minden széken ült valaki. Az osztály létszáma 27 fő, és a teremben volt a tanár is.

*a)* Laci összesen 116 széklábat számolt össze. Mutassuk meg, hogy tévedett!

*b)* Laci rájött, hogy tévedett, és újra összeszámolta a széklábakat. Ezúttal 75 széklábat számolt össze. Lehetséges-e, hogy most jól számolt?

**Rejtvény**

**Zoli jó matekból. Egyszer egy barátja megkérte, hogy nézze meg, jól csinálta-e meg a házi feladatát. A feladat így szólt: *Oldjuk meg a $12 + 9(4x - 5) + 3x = 44$ egyenletet az egész számok halmazán!***
**– A megoldásom $-100$ és 100 közé esik – mondta Zolinak a barátja.**
**Zoli – anélkül, hogy bármit is számolt volna vagy megnézte volna a megoldást – rávágta, hogy rosszul oldotta meg a feladatot. Hogyan jött rá?**

# 5 Halmazok, kombinatorika

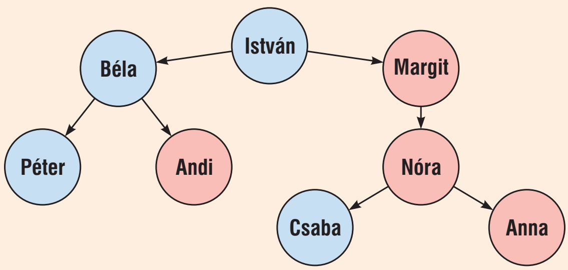
# 7. Kapcsolatok


A térképen a városokat összekötő utakat vonalakkal jelöljük. Matematikában is szoktuk vonalakkal, nyilakkal jelölni a dolgok közötti kapcsolatokat. Az ilyen ábrázolás sokszor segít a feladatok megértésében is.

### 1. példa

István fia Béla, Béla nővére Margit, Béla fia Péter. Margit lánya Nóra, Csaba anyja Nóra, Anna bátyja Csaba, Andi apja Béla. Ki kinek a testvére? Jelöljük a szereplőket körökkel, és mutasson nyíl a szülőtől a gyereke felé!

**Megoldás**




Láthatjuk, hogy Béla és Margit, Péter és Andi, Csaba és Anna testvérek.

Rajzold fel a családfádat!

### 2. példa

Az állatok focibajnokságába 5 csapat nevezett be. Minden csapat egyszer játszik mindegyikkel. A győztes 2 pontot kap, döntetlenért 1 pont jár, a vesztes pedig 0 pontot kap.

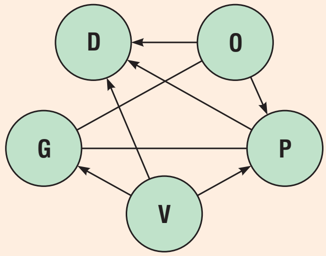
A lejátszott meccsek:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Oroszlánok–Denevérek | 3 : 2 | Gazellák–Polipok | 3 : 3 |
| Vérebek–Gazellák | 5 : 1 | Denevérek–Vérebek | 1 : 3 |
| Gazellák–Oroszlánok | 2 : 2 | Polipok–Oroszlánok | 0 : 2 |
| Polipok–Denevérek | 2 : 1 | Vérebek–Polipok | 1 : 0 |

*a)* Ábrázoljuk diagramon a meccseket úgy, hogy nyíl mutasson a győztestől a vesztes felé! Döntetlen esetén nyíl nélküli vonalat rajzoljunk!
*b)* Kinek van a legtöbb győzelme?
*c)* Kinek hány pontja van?
*d)* Hány meccs van még hátra?
*e)* Ki nyerheti a bajnokságot?

**Megoldás**

*a)* A csapatok nevét kezdőbetűikkel jelölve a következő diagramot kapjuk:




*b)* Figyeljük meg, hogy melyik körből indul a legtöbb nyíl! Ebből láthatjuk, hogy a Vérebeknek van a legtöbb győzelmük: 3.

*c)* Vérebek: $3 \cdot 2 = 6$ pont; Gazellák: $1 + 1 = 2$ pont; Denevérek 0 pont; Polipok $2 + 1 = 3$ pont; Oroszlánok $2 \cdot 2 + 1 = 5$ pont.

*d)* Az ábráról leolvasható, hogy 2 meccs van még hátra, a Denevérek és a Gazellák, valamint az Oroszlánok és a Vérebek között. (A bajnokságban összesen 10 meccset játszanak.)

*e)* Az utolsó fordulóban az Oroszlánok a Vérebekkel játszanak. Ha a Vérebek nyernek vagy döntetlent játszanak, akkor megőrzik vezető helyüket, és megnyerik a bajnokságot. Ha az Oroszlánok nyernek, akkor 7 pontjuk lesz, a Vérebeknek csak 6, így az Oroszlánok nyerik a bajnokságot.

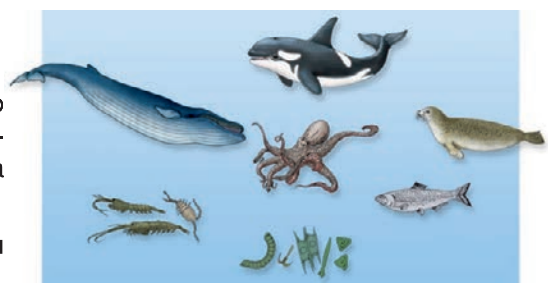
**A bajnokság állása:**

| | |
|---|---|
| 1. Vérebek | 6 pt |
| 2. Oroszlánok | 5 pt |
| 3. Polipok | 3 pt |
| 4. Gazellák | 2 pt |
| 5. Denevérek | 0 pt |

# Feladatok

**1.** Jelöljük nyilakkal, hogy az ábrán látható élőlények közül melyik melyikkel táplálkozik! A nyíl mutasson az állattól a tápláléka felé! (➡)

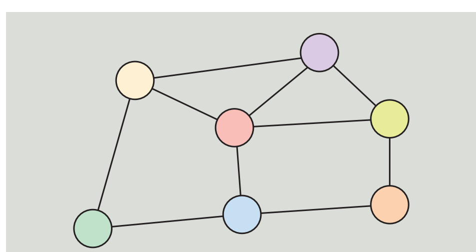
kék bálna; állati plankton; hal; kardszárnyú delfin; polip; fóka és növényi plankton.



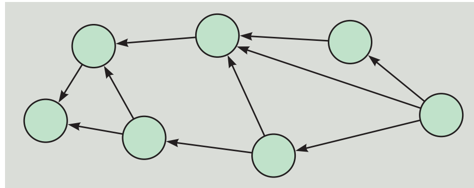
**2.** Egy magas hegyen falvak vannak. A köztük lévő utakat az ábra mutatja. (➡)

Keressünk 3 falut úgy, hogy közülük

*a)* bármely kettő között legyen közvetlen út;
*b)* bármely kettő között ne legyen közvetlen út!



**3.** Dóri elkezdett rajzolni egy ábrát, melyben a nyíl a számtól az osztójára mutat. Még nem sikerült minden nyilat berajzolnia és a számokat beírnia. Rajzoljuk le az ábrát, helyezzük el benne az 1; 2; 4; 6; 8; 12; 48 számokat, és húzzuk be a hiányzó nyilakat!



**4.** A megyei teniszbajnokságban kieséses rendszerben játszanak, azaz a játékosokat minden fordulóban párokba sorolják, és mindig a győztes jut tovább. Végül két játékos marad, ők játsszák a döntőt, és ennek győztese nyeri a bajnokságot. Készítsünk nyíldiagramot, és határozzuk meg, hogy hány meccset játszanak, mire kiderül, hogy ki a bajnok, ha a bajnokságban *a)* 8 játékos; *b)* 16 játékos indul!

**5.** Samu és Sári testvérek. Samunak ugyanannyi lánytestvére van, mint fiútestvére. Sárinak kétszer annyi fiútestvére van, mint lánytestvére. Hány fiú és hány lány van a családban?

**6.** Az iskolai kosárbajnokságon minden csapat játszik mindegyikkel oda-visszavágót. Hány meccset játszanak összesen, ha *a)* 3; *b)* 4; *c)* 5 csapat nevezett a bajnokságba?

**7.** A 7. b osztály sakkbajnokságára hatan neveztek. Két csoportra osztották őket. A csoportokban mindenki mindenkivel egyszer játszott, majd a csoportelsők játszottak az első helyért, a másodikok a harmadik helyért, és a harmadikok az ötödik helyért. Hány meccset játszottak így összesen?

**8.** A Naprendszer 8 bolygója között a következő űrjáratokat létesítették:

| | |
|---|---|
| Vénusz–Neptunusz; | Merkúr–Vénusz; |
| Jupiter–Szaturnusz; | Jupiter–Uránusz; |
| Szaturnusz–Neptunusz; | Uránusz–Mars; |
| Neptunusz–Merkúr; | Merkúr–Jupiter; |
| Szaturnusz–Jupiter; | Mars–Neptunusz; |
| Föld–Merkúr; | Mars –Föld. |


Hogyan juthat el egy űrutazó a Földről a Marsra ezekkel a járatokkal? (A járatok csak a megadott irányba közlekednek.)

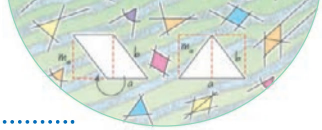
***9.** Figura országban kilenc város van, melyek neve 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9. Egy utazó azt találta, hogy egyik városból egy másikba akkor és csak akkor tud repülővel eljutni, ha a két város nevét (ebben a sorrendben) egymás után írva, az így kapott kétjegyű szám osztható 3-mal. Eljuthat-e az utazó az 1 városból a 9 városba?

***10.** Egy hattagú társaságban az egyik embernek egy, a másodiknak kettő, a harmadiknak három, a negyediknek négy, az ötödiknek pedig öt barátja van jelen. Hány barátja van jelen a hatodik embernek, ha a barátságok kölcsönösek?

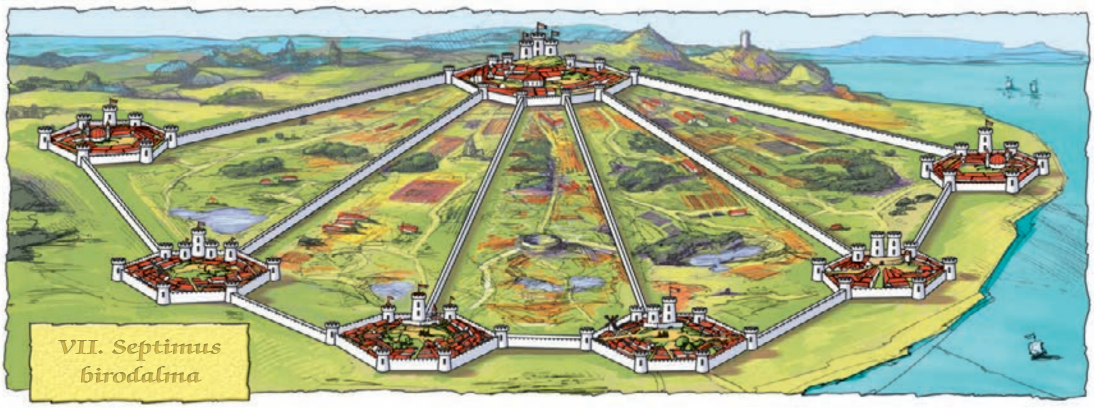
Rejtvény

**Trim ország királya megelégelte miniszterelnöke ténykedését, és útilaput akart kötni a talpára. Az elbocsátás alkotmányos módja az országban az, hogy az illetőnek látatlanban húznia kell a „Menjen” és a „Maradjon” feliratú cédulák közül, ez dönti el a sorsát. A király azonban nem akart lehetőséget adni miniszterelnökének a maradásra, ezért mindkét cédulára a „Menjen” feliratot íratta. A ravasz miniszterelnök megtudta ezt, és egy ügyes trükkel mégis elérte, hogy maradjon. Hogyan történhetett ez?**

# 7 Síkgeometria II.



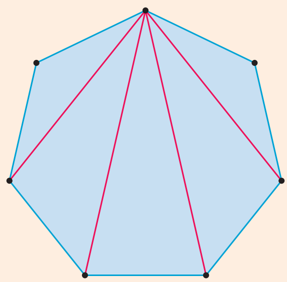
# 6. Sokszögek




**1. példa**

VII. Septimus király hétszög alakú birodalmának minden csúcsában egy-egy város állt, körben pedig egy Kis Fal határolta. A király végrendeletében ez állt: „Királyi fővárosomat a többi várossal egy-egy Kis Fal kösse össze! Így birodalmamat háromszög alakú részekre osztván mindegyiket egy-egy fiam örökölje!” Septimus minden fiának éppen jutott egy-egy országrész. Hány Kis Falat kellett építeni? Hány fia volt Septimusnak?

**Megoldás**




A rajz mutatja, hogy négy Kis Falat kellett építeni. (A fővárost és a vele szomszédos két várost már korábban is Kis Fal kötötte össze, saját magával pedig természetesen nem kellett összekötni.)

Így a városok számánál **3-mal kevesebb,** azaz 4 Kis Fal épült.

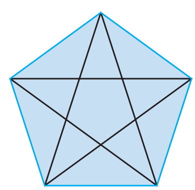
Ezzel a birodalmat 5 részre osztotta Septimus, tehát öt fia volt. A részek száma **2-vel kevesebb,** mint a városok száma, hiszen minden megépült fal egy új, háromszög alakú országrészt hozott létre, az utolsó viszont kettőt.

Másképp is indokolhatnánk: a keletkezett országrészekben az eredeti Kis Fal minden darabja szemben lesz a fővárossal, kivéve azt a kettőt, amely a fővárost a szomszéd városokkal összeköti.

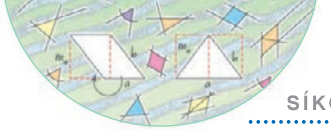
Egy $n$ oldalú sokszög egy csúcsából $n - 3$ átló húzható.

Ha egy sokszögnek az egyik csúcsából induló összes átlóját behúzzuk, a sokszöget $n - 2$ háromszögre bontjuk.

$n$ csúcsból $n \cdot (n - 3)$ átló húzható, de így minden átlót kétszer (mindkét végpontnál) számoltunk.



**Ezért az $n$ oldalú sokszög összes átlóinak száma:** $\dfrac{n \cdot (n-3)}{2}$.

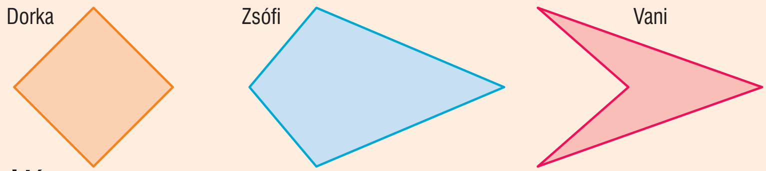




## A sokszögek belső szögeinek összege

**2. példa**

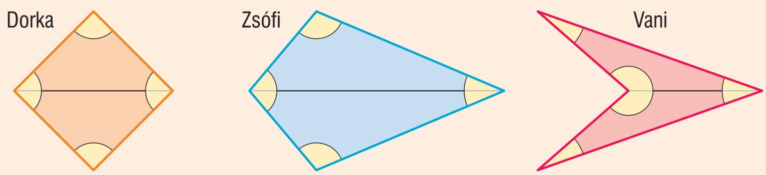
Dorka, Zsófi és Vani versenyeztek, ki tud olyan négyszöget rajzolni, amelyben a belső szögek összege a lehető legnagyobb. Ki nyert?




Dorka és Zsófi konvex, Vani viszont konkáv négyszöget rajzolt.

**Megoldás**

Húzzunk be egy-egy belső átlót a három négyszögbe! Ezzel a négyszögeket két háromszögre, a szögeiket pedig a háromszögek szögeire bontottuk. Mivel egy háromszög belső szögeinek összege 180°, mindhárom négyszög belső szögeinek összege 180° + 180° = 360°. Így mindhárman egyformán győztesnek érezhetik magukat.




**Egy tetszőleges négyszög belső szögeinek összege mindig 360°.**
Ezt úgy láthatjuk be, hogy egy belső átló berajzolásával a négyszöget két háromszögre bontjuk.

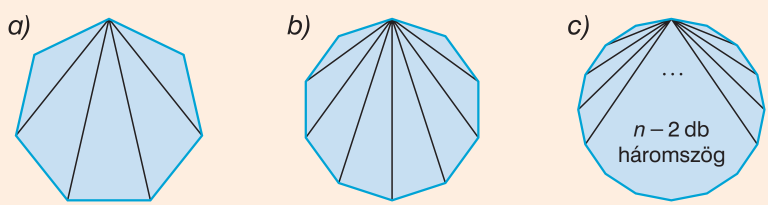
**3. példa**

Mennyi az alábbi tetszőleges sokszögek belső szögeinek összege?

*a)* hétszög; *b)* tízszög; *c)* $n$ oldalú sokszög.

**Megoldás**

Az előző két példa alapján dolgozunk.

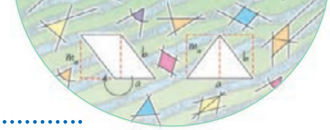



Az $n$ oldalú sokszög egy csúcsból induló átlóival $n - 2$ háromszögre bontható.

*a)* A hétszöget egy csúcsából kiinduló átlói $7 - 2 = 5$ háromszögre bontják. Ezek belső szögeinek összege egyenként 180°, együtt pedig a hétszög belső szögeinek összege, azaz $5 \cdot 180° = 900°$.

*b)* Tízszögnél: $(10 - 2) \cdot 180° = 8 \cdot 180° = 1440°$.

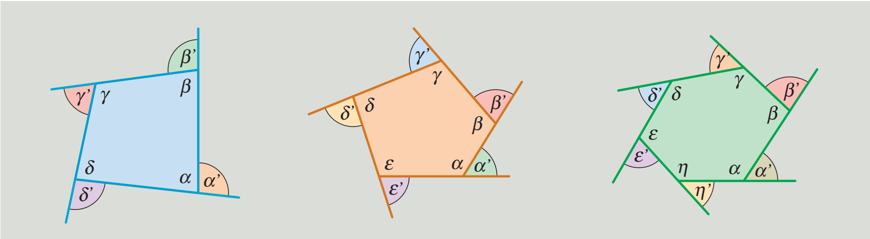
*c)* Egy $n$ oldalú sokszögnél: $(n - 2) \cdot 180°$.

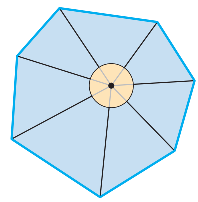


Egy tetszőleges $n$ oldalú sokszög belső szögeinek összegét úgy kaphatjuk meg, hogy a sokszöget egy csúcsból induló átlókkal háromszögekre bontjuk. Mivel így $n - 2$ háromszögünk keletkezik, az $n$ oldalú sokszög belső szögek összege $(n - 2) \cdot 180°$.

Egy $n$ oldalú sokszög belső szögeinek összege $(n - 2) \cdot 180°$.

## A konvex sokszögek külső szögeinek összege



Lássuk be a fenti állítást az ábra alapján is!

**4. példa**

Határozzuk meg egy konvex hétszög külső szögeinek összegét!

**Megoldás**

A konvex hétszögben bármely belső szög és a mellette fekvő külső szög összege 180°.

Így a hétszög összes külső és belső szögének összege együtt

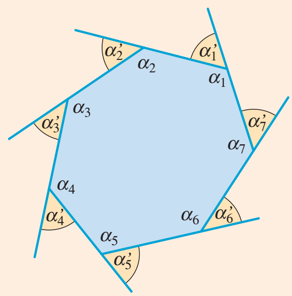
$$7 \cdot 180° = 1260°.$$

Az előző feladatból tudjuk, hogy a belső szögek összege

$$5 \cdot 180° = 900°.$$

A külső szögek összege a kettő különbsége, azaz

$$1260° - 900° = 360°.$$




A külső szögek összegéről csak konvex sokszögeknél beszélhetünk, hiszen a konkáv szögeknek nincs külső szögük.

Vezessünk körbe egy ceruzát a hétszög kerületén a háromszögeknél látott módon!

Hányszor fordul körbe?

Gondolatmenetünk tetszőleges $n$ oldalú konvex sokszögre is alkalmazható.

| a belső szögek összege | + | **a külső szögek összege** | = | a csúcsok száma szorozva 180°-kal |
|---|---|---|---|---|
| | | ⇓ | | |
| $(n - 2) \cdot 180°$ | + | **a külső szögek összege** | = | $n \cdot 180°$ |

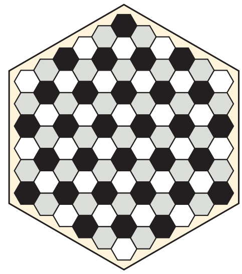
⇓

**A külső szögek összege 360°.**

# Feladatok

**1.** Hány átló húzható egy
*a)* hatszög; *b)* tizenötszög; *c)* nyolcvannyolcszög
egy csúcsából? Hány háromszögre osztják ezek a sokszöget?

**2.** A hexasakktábla szabályos hatszög alakú. Határozzuk meg belső szögeinek összegét! (➡)



**3.** Vágjunk ki olyan egybevágó egyenlő szárú háromszögeket egy papírlapból, amelyek szárszöge 30°! Rakjunk ki belőlük különböző sokszögeket! Határozzuk meg ezek belső szögeinek összegét!

**4.** Egy négyszög belső szögeinek aránya 1 : 2 : 3 : 3.
Mekkorák a négyszög belső szögei?

**5.** Egy ötszög belső szögeinek aránya 1 : 3 : 4 : 5 : 5. Mekkorák az ötszög belső szögei?

**6.** Egy konvex sokszögről tudjuk, hogy belső szögeinek összege éppen ötször annyi, mint külső szögeinek összege. Hány oldala van ennek a sokszögnek?

**7.** Töltsük ki az alábbi táblázatot a megadott szabályos sokszögekre vonatkozóan!

| csúcsok száma | 5 | 8 | | | | | | *n* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| külső szögek összege | | | | | | | | |
| egy külső szög | | | 60° | | | | | |
| egy belső szög | | | | 90° | 144° | | | |
| belső szögek összege | | | | | | 1800° | 1980° | |

**8.** Egy ötszög három külső szöge 110°, 40° és 80°. A másik két belső szöge egyenlő. Mekkorák az ötszög belső szögei?

**9.** Mennyi egy középpontosan szimmetrikus hatszög három szomszédos szögének összege?

**10.** Egy tengelyesen szimmetrikus ötszög két belső szöge 140° és 100°. Mekkorák lehetnek az ötszög belső szögei?

***11.** Egy ötszög két belső szöge 160° és 137°. A másik három szög közül az egyik kétszerese a másodiknak és harmada a harmadiknak. Mekkorák az ötszög belső szögei?

**12.** Hány belső szöge lehet derékszög egy konvex sokszögnek?

Rejtvény

**Egy szabályos ötszög átlóit berajzoltuk, majd oldalait letöröltük, és így az alábbi csillagot kaptuk. Mekkorák a csillag csúcsainál fekvő szögek?**